

# Flächen- und Volumenintegrale in krummlinigen Koordinaten

1) Betrachtet eine Halbwügelschale mit Innenradius  $r_1$  und Außenradius  $r_2$  ( $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : r_1^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq r_2^2, z \geq 0\}$ )  
 Sie besteht aus einem Material mit der Dichte  $\rho = az$  mit  $a > 0$ .

a) Berechne die Masse der Halbwügelschale.

b) Berechne das Trägheitsmoment für die Rotation um die  $z$ -Achse

Lösungsskizze:

Kugelkoordinaten:  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, dV = r^2 \sin \theta$

$$a) M = \int_V \rho dV = \int_{r_1}^{r_2} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta r^2 \sin \theta \underbrace{a \cos \theta}_{=\rho}$$

$$= 2\pi a \int_{r_1}^{r_2} dr \int_0^{\pi/2} d\theta r^3 \underbrace{\sin \theta \cos \theta}_{= \frac{1}{2} \sin(2\theta)}$$

$$= \frac{2\pi a}{4} (r_2^4 - r_1^4) \underbrace{\left[ -\frac{1}{4} \cos(2\theta) \right]_0^{\pi/2}}_{= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{\pi a}{4} (r_2^4 - r_1^4)$$

b) Trägheitsmoment

$$\int_V g(x,y,z) (r_{\perp})^2 dV$$

$$r_{\perp}^2 = x^2 + y^2 \\ = r^2 \sin^2 \theta$$

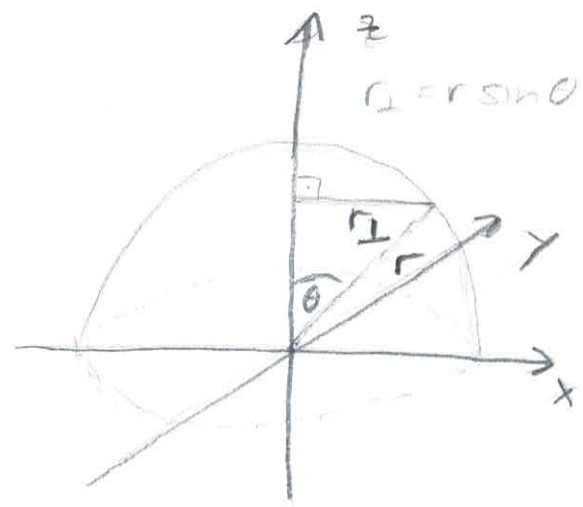
oder auch  
über Dreieck  
(siehe Skizze)

$$= \int_{r_1}^{r_2} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \underbrace{r^2 \sin \theta}_{\rho} \underbrace{a r \cos \theta}_{z} \underbrace{r^2 \sin^2 \theta}_{= r_{\perp}^2}$$

$$= 2\pi a \int_{r_1}^{r_2} dr \int_0^{\pi/2} d\theta r^5 \sin^3 \theta \cos \theta$$

$$= \frac{\pi a}{3} (r_2^6 - r_1^6) \left[ \frac{1}{4} \sin^4 \theta \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi a}{12} (r_2^6 - r_1^6)$$



2) Gegeben ist folgendes Volumen:

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq z \leq 1 \}.$$

Die Funktion  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + z$  soll im Volumen  $V$  integriert werden. Wählt passende Koordinaten und füh. d. die Integration aus

Lösungsskizze

Zylinderkoordinaten  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad dV = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz$

$$\int_V f(x, y, z) \, dV = \int_1^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dz (\rho + z) \rho$$

$$= 2\pi \int_1^3 d\rho \left[ \rho^2 z + \rho \frac{1}{2} z^2 \right]_0^1 = 2\pi \int_1^3 d\rho \left( \rho^2 + \frac{1}{2} \rho \right)$$

$$= 2\pi \left[ \frac{1}{3} \rho^3 + \frac{1}{4} \rho^2 \right]_1^3 = 2\pi \left( 9 + \frac{9}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = 2\pi \frac{64}{6} = \frac{64}{3} \pi$$

3) Gegeben ist die Fläche  $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Berechnet:  $\int_F (x^2 + xy + y^2) e^{-(x^2+y^2)} dx dy$

Lösungsskizze:

Polarkoordinaten  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$ ,  $dx dy = r dr d\varphi$

$$\int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot r (r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \cos \varphi \sin \varphi + r^2 \sin^2 \varphi) e^{-r^2}$$

$$= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\varphi (1 + \underbrace{\cos \varphi \sin \varphi}_{= \frac{1}{2} \sin(2\varphi)}) r^3 e^{-r^2}$$

$$= \left[ \int_0^{2\pi} d\varphi (1 + \frac{1}{2} \sin(2\varphi)) \right] \cdot \left[ \int_0^1 dr r^3 e^{-r^2} \right]$$

$$= \underbrace{\left[ \varphi - \frac{1}{4} \cos(2\varphi) \right]_0^{2\pi}}_{= 2\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 du u e^{-u}$$

$$\left[ u = r^2 \quad \frac{du}{dr} = 2r \right]$$

part. Int.

$$= \pi \left( \left[ -u e^{-u} \right]_0^1 + \int_0^1 du e^{-u} \right)$$

$$= \pi \left( -\frac{1}{e} + 0 + \left[ -e^{-u} \right]_0^1 \right) = \pi \left( -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 \right)$$

$$= \pi \left( 1 - \frac{2}{e} \right)$$