# Übungen zur Vorlesung
# Theoretische Physik Ia – Rechenmethoden der Mechanik

*Dr. habil. Philipp Hövel, Katharina Scherer, Noora Aho, Joshua Weißenfels, Max Lauer*

**WiSe 2024/25** **Blatt 7** **Abgabe 11.12.2024**

## Aufgabe 24 *Kreuzprodukt* *(20 Punkte)*

Wir betrachten zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$.

a) Wie lauten die Komponenten des Kreuzprodukts zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$? *(1 Punkt)*

b) Zeigt, dass $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ gilt. *(2 Punkte)*

c) Zeigt, dass $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ senkrecht auf $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ steht. *(3 Punkte)*

d) Zeigt, dass

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \alpha,$$

wobei $\alpha$ der Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ist. **Hinweis:** Untersucht $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2$. *(4 Punkte)*

e) Das Kreuzprodukt kann auch durch das so genannte Levi-Civita-Symbol (auch Epsilon-Tensor genannt) ausgedrückt werden:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{wenn } (i,j,k) \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist} \\ -1 & \text{wenn } (i,j,k) \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigt, dass die $i$-te Komponente des Kreuzprodukts gegeben ist durch *(3 Punkte)*

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k.$$

f) Schreibt das Spatprodukt $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ mithilfe des Levi-Civita-Symbols. Zeigt, dass die Vektoren im Spatprodukt zyklisch vertauscht werden können:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$$

Argumentiert mit der geometrischen Interpretation des Spatprodukts, warum die zyklische Vertauschbarkeit zu erwarten ist. *(4 Punkte)*

g) Zeigt mithilfe der BAC-CAB-Regel die Jacobi-Identität:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0.$$

*(3 Punkte)*

**Hintergrund:** Aufgrund dieser Identität, zusammen mit der Bilinearität des Kreuzprodukts und der Eigenschaft $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$, bildet das Kreuzprodukt eine sogenannte *Lie-Algebra*. Lie-Algebren kommen in der Physik z.B. bei Rotationen oder beim quantenmechanischen Drehimpuls vor.

## Aufgabe 25 *Skalarprodukt im Vektorraum stetiger Funktionen (12 Punkte)*

Diese Aufgabe illustriert ein für die Physik besonders wichtiges Beispiel eines Skalarprodukts: Im Vektorraum $V$ der stetigen, reellen Funktionen mit den üblichen Verknüpfungsregeln der Addition und skalaren Multiplikation:

$$\begin{aligned} &\forall f, g \in V,\, I \in \mathbb{R}: && f + g : I \to \mathbb{R}, && x \mapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x), \\ &\forall f \in V,\, \lambda \in \mathbb{R}: && \lambda \cdot f : I \to \mathbb{R}, && x \mapsto (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x) \end{aligned}$$

kann ein Skalarprodukt mittels Integration definiert werden.

a) Ein Skalarprodukt ist eine *positiv definite, symmetrische Bilinearform*. Erklärt diese drei Begriffe. *(3 Punkte)*

b) Zeigt, dass folgende Abbildung ein Skalarprodukt auf V darstellt: *(3 Punkte)*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \qquad (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle \equiv \int_I f(x) g(x) \mathrm{d}x$$

c) Nun wollen wir zeigen, dass Sinus- und Kosinusfunktionen orthonormal im Sinne dieses Skalarprodukts sind mit dem Intervall $I = [-\pi, \pi]$. Seien, mit $n \in \mathbb{N}_0$,

$$S_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \qquad C_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx)$$

Berechnet: $\langle S_n, S_m \rangle$, $\langle C_n, C_m \rangle$ und $\langle S_n, C_m \rangle$. *(6 Punkte)*
**Hinweise:** Unterscheidet die Fälle $n = m$ und $n \neq m$.
Mit trigonometrischen Additionstheoreme findet ihr Beziehungen wie

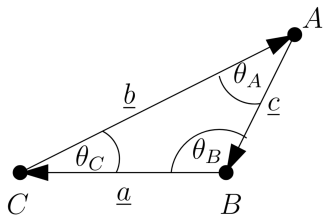
$$\cos(nx)\cos(mx) = \frac{1}{2}\left[\cos((n-m)x) + \cos((n+m)x)\right],$$

die das Auffinden der Stammfunktionen erleichtern.

**Hintergrund:** Die Sinus- und Kosinusfunktionen bilden sogar eine *Basis* für periodische Funktionen (genauer für periodische, quadratintegrierbare Funktionen). Folglich bilden sie eine *Orthonormalbasis*. Dies ist die Grundlage der so genannten *Fourier-Reihen* und der *Fourier-Transformation*, die wichtige Anwendungen in der gesamten Physik, der Signal- und Bildverarbeitung haben. Zum Beispiel verwendet das bekannte JPEG-Format Fourier-Transformation für die Kompression von Bildern.

**Aufgabe 26** *Anwendung Kreuzprodukt* *(8 Punkte)*

a) Betrachtet das Dreieck ABC.

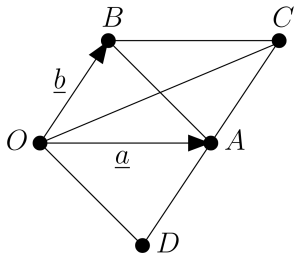



Nutzt die Kreuzprodukte der Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$, um den Sinussatz zu zeigen:

$$\frac{a}{\sin\theta_A} = \frac{b}{\sin\theta_B} = \frac{c}{\sin\theta_C}.$$

*(4 Punkte)*

b) Betrachtet das Parallelogramm OACB und die Verbindungslinie OD, die parallel zu AB ist.




Findet die Fläche des Parallelogramms OACB und des Dreiecks ODC. Zeigt, dass die beiden Flächen gleich sind. *(4 Punkte)*