Übungen zur Vorlesung
Theoretische Physik Ia – Rechenmethoden der Mechanik

Dr. habil. Philipp Hövel, Katharina Scherer, Noora Aho, Joshua Weißenfels, Max Lauer

WiSe 2024/25 **Blatt 8** **Abgabe 18.12.2024**

Aufgabe 27 *Konservatives Vektorfeld* *(10 Punkte)*

Betrachtet das Vektorfeld $\boldsymbol{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} ye^{xy}\sin z + x + y \\ xe^{xy}\sin z + x + y - z \\ e^{xy}\cos z - y + z \end{pmatrix}$

a) Berechnet die Divergenz des Feldes. *(2 Punkte)*

b) Berechnet die Rotation des Feldes. *(2 Punkte)*

c) Begründet, warum das Feld konservativ ist. *(1 Punkt)*

d) Bestimmt ein Potential Φ, um $\boldsymbol{v}$ als $\nabla\Phi$ darzustellen. *(5 Punkte)*

Aufgabe 28 *Differenzialoperatoren der Vektoranalysis* *(12 Punkte)*

a) Berechnet für das Skalarfeld $\Phi(\boldsymbol{x}) = 3x^2 - yz$, und das Vektorfeld $\mathbf{A}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 3xyz^2 \\ 2xy^3 \\ -x^2yz \end{pmatrix}$

i) $\nabla\Phi$,

ii) $\nabla \cdot \mathbf{A}$,

iii) $\nabla \times \mathbf{A}$,

iv) $\nabla \times (\Phi\mathbf{A})$.

(5 Punkte)

b) Beweist die Beziehung

$$\nabla \times (\Phi\mathbf{A}) = (\nabla\Phi) \times \mathbf{A} + \Phi(\nabla \times \mathbf{A})$$

für beliebige Skalar- und Vektorfelder Φ bzw. $\mathbf{A}$. *(3 Punkte)*

c) Beweist, dass für zwei beliebige Vektorfelder $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ folgender Zusammenhang gilt *(4 Punkte)*

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{B}\,.$$

Hinweis: Für die Beweise in b) und c) könnt ihr zum Beispiel das Levi-Civita-Symbol nutzen.

Aufgabe 29 *Laplace-Operator* *(8 Punkte)*

Der Laplace-Operator Δ für Skalarfelder Φ ist gegeben mit $\Delta\Phi = \nabla \cdot \nabla\,\Phi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi$. Er kann auch - mit gebotener Vorsicht - auf Vektorfelder angewendet werden.

a) Berechnet $\Delta\Phi$ für das Skalarfeld $\Phi(\boldsymbol{x}) = x^2e^z + y^4$. *(2 Punkte)*

b) Betrachtet erneut $\mathbf{A}$ aus Aufgabe 28, nutzt eure Ergebnisse aus a) ii) und iii) und berechnet $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$ und $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$. *(2 Punkte)*

c) Berechnet $\Delta\mathbf{A}$, um zu sehen, dass $\Delta\mathbf{A} \neq \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$. *(2 Punkte)*

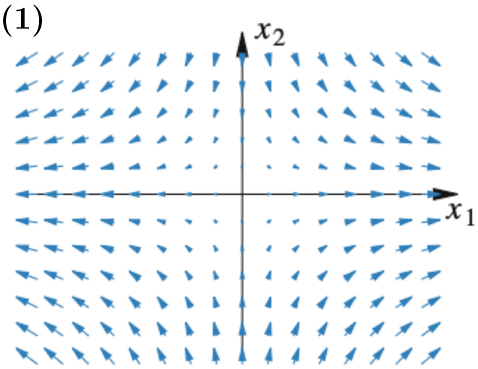
d) Nutzt die BAC-CAB-Regel ($\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$), um zu zeigen das für den Laplace-Operator für Vektorfelder $\mathbf{A}$ folgendes gilt: *(2 Punkte)*

$$\Delta\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}$$

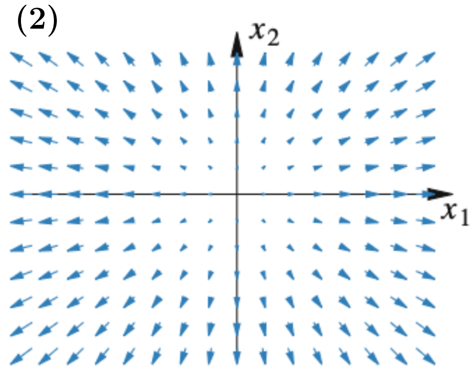
Aufgabe 30 *Wirbel- und Quellendichte von Vektorfelder* *(10 Punkte)*

a) Betrachtet die Vektorfelder in der Abbildung und gebt jeweils an, ob sie wirbel- und/oder quellenfrei sind. Begründet eure Antwort mit der Divergenz bzw. der Rotation. *(4 Punkte)*

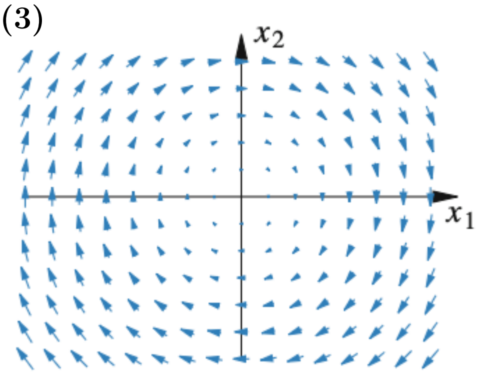
(1)



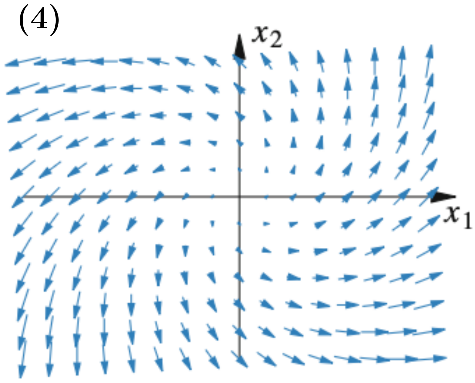
(2)



(3)



(4)



b) Betrachtet $\mathbf{V_1}(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2, 2x_1x_2)^T$ und $\mathbf{V_2}(x_1, x_2) = (2x_1x_2, -x_1^2 - x_2^2)^T$

i) Plottet beide Vektorfelder. *(2 Punkte)*

ii) Berechnet die Divergenz von $\mathbf{V_1}$ und gebt an in welcher Halbebene $\operatorname{div} \mathbf{V_1} > 0$ bzw. $\operatorname{div} \mathbf{V_1} < 0$ ist. *(2 Punkte)*

iii) Berechnet die x_3-Komponente der Rotation von $\mathbf{V_2}$ und gebt an in welcher Halbebene $\operatorname{rot} \mathbf{V_2} > 0$ bzw. $\operatorname{rot} \mathbf{V_2} < 0$ *(2 Punkte)*