WiSe 2024/25 Übung 8

Konservative Kraftfelder

Gegeben ist das folgende Kraftfeld

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} z\cos(xz) + y \\ x \\ x\cos(xz) \end{pmatrix}$$

.

a) Zeigt, dass $\mathbf{F}$ ein konservatives Kraftfeld ist. Tipp: Schaut euch die Rotation an.

b) Bestimmt ein Potenzial Φ, sodass ihr das Kraftfeld als $\mathbf{F} = \nabla\Phi$ schreiben könnt.

Divergenz und Rotation

a) Erklärt euch nochmal was ein Gradient, eine Divergenz und eine Rotation ist. Macht euch dabei vor allem bewusst auf was die Operationen angewendet werden und welche Form das Ergebnis der Operation hat (im Sinne von Skalar $\rightarrow$ Vektor)

b) Warum haben die Ausdrücke $\operatorname{div}\operatorname{div}\mathbf{A}$ und $\operatorname{rot}\operatorname{div}\mathbf{A}$ keinen Sinn?

c) Berechnet für das Skalarfeld

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = xy + yz + zx$$

und das Vektorfeld

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x^2y \\ y^2z \\ z^2x \end{pmatrix}$$

i) $\nabla \cdot \mathbf{A}$,

ii) $\mathbf{A} \cdot \nabla\Phi$,

iii) $\nabla \cdot (\Phi\mathbf{A})$,

iv) $\nabla \times \mathbf{A}$

d) Zeichnet ein wirbelfreies und ein nicht wirbelfreies Vektorfeld. Wie hängt das mit der Rotation des Feldes zusammen?

e) Zeichnet je ein Vektorfeld mit einer Quelle, mit einer Senke und ein quellenfreies. Wie hängt das mit der Divergenz des Feldes zusammen?

Konservative Kraftfelder

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} z\cos(xz)+y \\ x \\ x\cos(xz) \end{pmatrix}$$

a) $$\nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z\cos(xz)+y \\ x \\ x\cos(xz) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ \cos(xz) - xz\sin(xz) - \cos(xz) + xz\sin(\\ 1-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \vec{F} \text{ ist konservativ}$$

b) $$\vec{F} = \nabla \phi = \begin{pmatrix} \partial_x \phi \\ \partial_y \phi \\ \partial_z \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

$$\phi = \int z\cos(xz) + y \, dx = \sin(xz) + yx + C_1(y,z)$$

$$\phi = \int x \, dy = yx + C_2(x,z)$$

$$\phi = \int x\cos(xz) \, dz = \sin(xz) + C_3(x,y)$$

$$\rightarrow \phi = \sin(xz) + xy$$

zur Kontrolle berechnet $\nabla\phi = \vec{F}$ ✓

Divergenz & Rotation

a) Gradient: „Skalar → Vektor"

Hinweis: Es gibt auch einen Vektorgradient, der auf Vektoren angewendet wird. Wird in der TpIa nicht behandelt.

$$\underline{\nabla}\phi = \begin{pmatrix} \partial_x \phi \\ \partial_y \phi \\ \partial_z \phi \end{pmatrix}$$

Divergenz: „Vektor → Skalar"
↪ Quellendichte

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{A} = \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z \qquad \text{mit } \underline{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

Rotation: „Vektor → Vektor"
↪ Wirbeldichte

$$\underline{\nabla} \times \underline{A} = \begin{pmatrix} \partial_y A_3 - \partial_z A_2 \\ \partial_z A_1 - \partial_x A_3 \\ \partial_x A_2 - \partial_y A_1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\left.\begin{matrix} \text{div div } A \\ \text{rot div } A \end{matrix}\right\}$$ macht keinen Sinn, da div A ein Skalar ist und div oder rot auf einen Vektor angewendet werden

c) $\phi = xy + yz + zx \qquad A = \begin{pmatrix} x^2y \\ y^2z \\ z^2x \end{pmatrix}$

i) $\underline{\nabla} \cdot \underline{A} = 2xy + 2yz + 2xz$

ii) $\underline{\nabla}\phi = \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \underline{A} \cdot \underline{\nabla}\phi &= x^2y(y+z) + y^2z(x+z) + z^2x(x+y) \\ &= x^2y^2 + x^2yz + xy^2z + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz^2 \\ &= x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + x^2yz + xy^2z + xyz^2 \end{aligned}$$

iii) $$\nabla \cdot (\phi \underline{A}) = \nabla \cdot \begin{pmatrix} x^3y^2 + x^2y^2z + x^3yz \\ xy^3z + y^3z^2 + xy^2z^2 \\ x^2yz^2 + xyz^3 + z^3x^2 \end{pmatrix}$$

$$= 3x^2y^2 + 2xy^2z + 3x^2yz + 3xy^2z + 3y^2z^2 + 2xyz^2$$
$$+ 2x^2yz + 3xyz^2 + 3z^2x^2$$

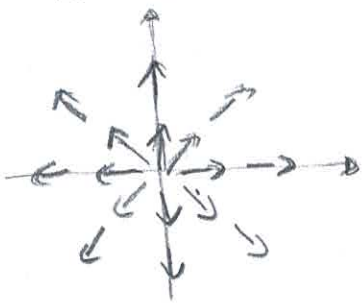
iv) $$\nabla \times \underline{A} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x^2y \\ y^2z \\ z^2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^2 \\ -z^2 \\ -x^2 \end{pmatrix}$$

d)

e)

wirbelfrei

rot = 0

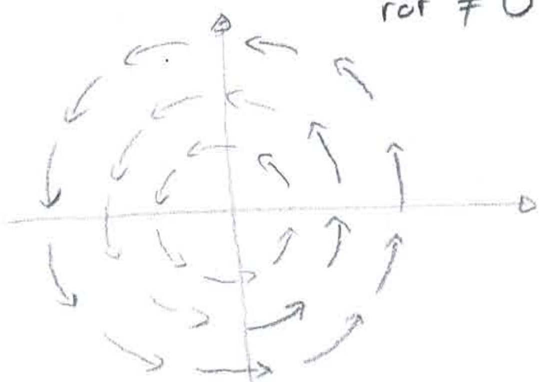


mit Quelle

div ≠ 0

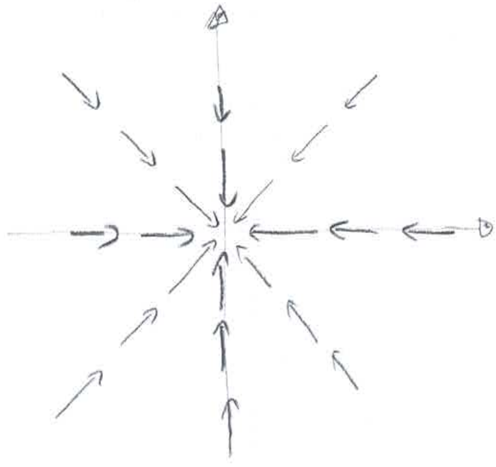
nicht wirbelfrei

rot ≠ 0



keine Quelle

div = 0



mit Senke

div ≠ 0