WiSe 2024/25 Übung 11

Matrizenmultiplikation

Berechnet alle möglichen Matrizenprodukte mit jeweils zwei der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Insgesamt sind 8 Matrizenprodukte möglich.

Gleichungssystem - Gaußsches Eliminationsverfahren

Verwendet das Gaußsche Eliminationsverfahren, um die Lösungen des folgende Gleichungssystem in Abhängigkeit von μ anzugeben:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 = \mu. \end{cases}$$

Zusatzübung: Lösen des Gleichungssystems: $\begin{cases} x_1 - 4x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

Zur Kontrolle: $L = \left\{ \frac{1}{17}\lambda \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ -11 \\ 17 \end{pmatrix} | \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Inverse von Matrizen

a) Berechnet die Inverse von

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 \\ 4 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Hinweis:*Wenden dazu das Eliminationsverfahren auf das Schema $A|\mathbb{1}$ an, wobei $\mathbb{1}$ die Einheitsmatrix ist. Ihr müsst demnach die gleichen Zeilen- und/oder Spaltenoperationen auf beide Matrizen anwenden bis die linke Matrix der Einheitsmatrix entspricht, d.h. bis das Schema die Form $\mathbb{1}|B$ hat.

b) Überprüft eurer Ergebnis durch Matrizenmultiplikation.

Matrizenmultiplikation

$A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 15 \\ 5 & 4 & 26 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 15 \\ 4 & 16 & 24 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$BD = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 16 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$CB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$CC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 16 \\ 2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$DA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 15 \\ 4 & 16 & 24 \end{pmatrix}$$

$$DD = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 = \mu \end{cases} \quad \hat{=} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & \mu \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II + I \\ III - 3I \end{array} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & \mu - 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III + II \end{array}$$

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{array}\right)$$

Gleichungssystem nur Lösbar für $\mu = 0$

Setze $x_3 = \lambda$

$$x_2 + 3\lambda = 3 \implies x_2 = 3 - 3\lambda$$

$$x_1 + 3 - 3\lambda + \lambda = 1 \implies x_1 = -2 + 2\lambda$$

Lösungsmenge: $L = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ für $\mu = 0$

$L = \emptyset$ „leere Menge" für $\mu \neq 0$

Berechnung Inverse

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 8 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 8 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -4\mathrm{I} \\ -6\mathrm{I} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -3 & 1 & 0 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{c} +2\mathrm{II} \\ \\ -4\mathrm{II} \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 10 \end{array}\right) \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{c} +\mathrm{III} \\ -\mathrm{III} \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 10 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -6 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

b)

$$A A^{-1} \stackrel{!}{=} \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 \\ 4 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -6 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6-8+3 & -12+24-12 & 18-48+30 \\ 4-7+3 & -8+21-12 & 12-42+30 \\ 1-2+1 & -2+6-4 & 3-12+10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

✓