WiSe 2024/25 Übung 12

Lineare Abbildung und Basiswechsel

Betrachtet die Standardbasis $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ und Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} = \{3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, -3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1\}$ von $\mathbb{R}^2$, und sei F die orthogonale Projektion auf die durch den Vektor $\mathbf{u} = (3, -1)^T$ definierte Gerade.

a) Skizziert die beiden Basen in einer Ebene.Zeichnet einen beliebigen Vektor $\mathbf{x}$ und seine orthogonale Projektion auf $(3, -1)^T$ in die Skizze ein.

b) Zeigt, dass die zu der linearen Abbildung $F : \mathbf{x} \mapsto F(\mathbf{x})$ gehörige Abbildungsmatrix in der Basis $\mathcal{E}$ gegeben ist durch:

$$_{\mathcal{E}}F_{\mathcal{E}} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Die orthogonale Projektion $F(\mathbf{x})$ eines Vektors $\mathbf{x}$ auf $\mathbf{u}$ ist definiert durch: $F(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{u}})\,\hat{\mathbf{u}}$, wobei $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/|\mathbf{u}|$.

c) Bestimmt die zu der linearen Abbildung F gehörigen Matrix in der Basis $\mathcal{B}$.

Eigenwerte, Eigenvektoren und Diagonalmatrix

Betrachtet die Matrix $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnet die Spur von $\mathbf{M}$. Die Spur (engl. *trace*) einer symmetrischen Matrix $\mathbf{M}$ ist die Summe der Diagonalelemente: $\mathrm{Tr}\,(\mathbf{M}) = \sum_i m_{ii}$.

b) Berechnet die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathbf{M}$.

c) Gebt die Matrix $\mathbf{P}$ an, welche $\mathbf{M}$ diagonalisiert: $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}$, wobei $\mathbf{D}$ diagonal ist.

d) Berechnet $\mathbf{D}$ durch entsprechenden Matrixmultiplikation.
Bemerkung: Macht euch bewusst, dass das Diagonalisieren einem Basiswechsel entspricht.

e) Ist die $\mathrm{Tr}\,(\mathbf{D})$ gleich $\mathrm{Tr}\,(\mathbf{M})$?

f) Betrachtet den Vektor $\mathbf{x} = (1, -3)$ und die Matrix $\mathbf{M}$. Schreibt $\mathbf{x}$ und $\mathbf{M}\mathbf{x}$ in der Basis aus den Eigenvektoren von $\mathbf{M}$.

Differenzialgleichungen

a) Löst die folgenden Anfangswertprobleme:

i) $y'(x) = y(x)\sin(x) + \sin(x)$, mit $y(\pi/2) = 4$

ii) $y''(x) + \pi^2 y(x) = 0$, mit Randwerten $y(0) = 1$; $y(3/2) = -5$

iii) $y'(x) + y(x) = \frac{e^{-x}}{1+x^2}$, mit $y(0) = 2$
Hinweis: Ihr dürft nutzten, dass $\arctan x$ die Stammfunktion zu $\frac{1}{1+x^2}$ ist.

b) Was ist die allgemeine Lösung der folgenden Differenzialgleichung:
$y'''(x) - 5y''(x) + 6y'(x) = 0$
Können ihr bereits ohne die DGL zu lösen, angeben wir viele Konstanten die allgemeine Lösung hat?

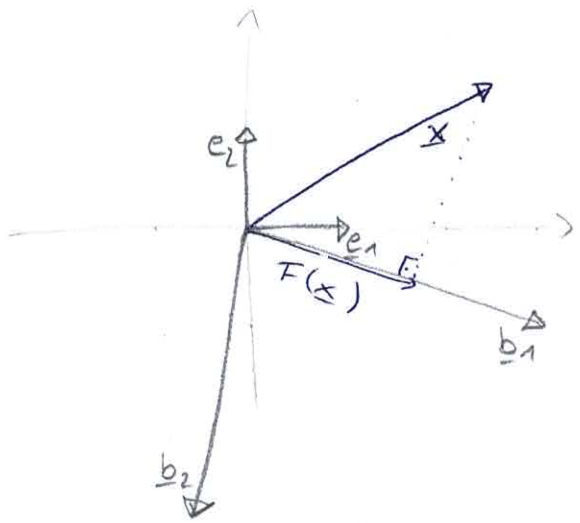
UE 12

Lineare Abbildung & Basiswechsel

$E = \{e_1, e_2\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$B = \{b_1, b_2\} = \{3\underline{e}_1 - \underline{e}_2, -3\underline{e}_2 - \underline{e}_1\}$

a)



b) $F(\underline{x}) = (\underline{x} \cdot \hat{\underline{u}})\hat{\underline{u}} = \dfrac{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{10}\sqrt{10}} \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{10}(3x-y)\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix}9x-3y\\-3x+y\end{pmatrix}$

$= \underbrace{\frac{1}{10}\begin{pmatrix}9 & -3\\-3 & 1\end{pmatrix}}_{= {}_E F_E}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

c) Projektionsgerade entspricht $\underline{b}_1$, daher ist ${}_B F_B = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$.

Kann explizit nachgerechnet werden mit

${}_B F_B = {}_B M_E \; {}_E F_E \; {}_E M_B$

- mit ${}_E M_B$: Basiswechselmatrix von B nach E, kann abgelesen werden, da b_1, b_2 als Linearkombi. von $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ angegeben sind

${}_E M_B = \begin{pmatrix}3 & -1\\-1 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{b}_1^{(E)} & \underline{b}_2^{(E)}\end{pmatrix}$

Basisvektoren B bzgl Basis E

• ${}_{B}M_{E}$ Basiswechselmatrix von E nach B

entweder über Inverse (da orthogonale Transformation)

$$ {}_{B}M_{E} = {}_{E}M_{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/10 & -1/10 \\ -1/10 & -3/10 \end{pmatrix} $$

oder durch die Darstellung von e_1, e_2 bzgl. Basis B:

$$ \underline{e}_1 = \alpha \underline{b}_1 + \beta \underline{b}_2 = \alpha(3\underline{e}_1 - \underline{e}_2) + \beta(-\underline{e}_1 - 3\underline{e}_2) $$

$$ = \underbrace{(3\alpha - \beta)}_{=1} \underline{e}_1 + \underbrace{(-\alpha - 3\beta)}_{=0} \underline{e}_2 $$

$$ 3\alpha = 1 + \beta \qquad \alpha = -3\beta $$

$$ -9\beta - \beta = 1 \qquad \alpha = 3/10 $$

$$ \beta = -1/10 $$

$$ \underline{e}_1^{(B)} = \begin{pmatrix} 3/10 \\ -1/10 \end{pmatrix} $$

$$ \underline{e}_2 = \gamma \underline{b}_1 + \delta \underline{b}_2 = \underbrace{(3\gamma - \delta)}_{=0} \underline{e}_1 + \underbrace{(-\gamma - 3\delta)}_{=1} \underline{e}_2 $$

$$ \delta = 3\gamma \qquad -\gamma - 3 \cdot 3\gamma = 1 \qquad \delta = -3/10 $$

$$ \Leftrightarrow \quad \gamma = -1/10 $$

$$ \underline{e}_2^{(B)} = \begin{pmatrix} -1/10 \\ -3/10 \end{pmatrix} $$

damit folgt ebenfalls

$$ {}_{B}M_{E} = \begin{pmatrix} 3/10 & -1/10 \\ -1/10 & -3/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{e}_1^{(B)} & \underline{e}_2^{(B)} \end{pmatrix} $$

Basisvektoren von E bzgl. Basis B

Damit kann explizit nachgerechnet werden:

$$ {}_{B}F_{B} = {}_{B}M_{E}\, {}_{E}F_{E}\, {}_{E}M_{B} = \begin{pmatrix} 3/10 & -1/10 \\ -1/10 & -3/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9/10 & -3/10 \\ -3/10 & 1/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} 3/10 & -1/10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} $$

Eigenwerte, Eigenvektoren & Diagonalmatrix

$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) $Tr(M) = 1 + 1 = 2$

b) $\det(M - \lambda \mathbb{1}) = (1-\lambda)^2 - 4 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 4$

$= \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$

$\rightarrow \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 3$ sind Eigenwerte

$\lambda_1 = -1$

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow 2x_1 = -2x_2 \quad \rightarrow \quad \underline{v}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$\underline{\lambda_2 = 3}$

$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow 2x_1 = 2x_2 \quad \rightarrow \underline{v}_2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ Eigenvektoren (mit $\alpha = 1$): $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $P = \begin{pmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D = P^{-1} M P \qquad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Diagonalisieren ist Basiswechsel von Standardbasis A, in eine neue Basis B, die Basis der Eigenvektoren:

$P \hat{=} {}_A P_B$: Basiswechselmatrix von B zu A

$P^{-1} \hat{=} {}_B P_A$ " von A zu B

${}_A P_B = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}$

↳ Basisvektoren von B bzgl. der Basis A entsprechen Eigenvektoren

$\rightarrow P^{-1} {}_A M_A P = {}_B P_A {}_A M_A {}_A P_B = {}_B M_B = D$

→ In Basis der Eigenvektoren von M hat M Diagonalform.

e) $Tr(D) = -1 + 3 = 2 = Tr(M)$

f) $\underline{x}^A = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = 2 \\ b = -1 \end{matrix}$ $\underline{x}^B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

oder über Basiswechselmatrix ${}_B P_A = P^{-1}$

$$\underline{x}^B = {}_B P_A \underline{x}^A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(M\underline{x})^B = {}_B M_B \underline{x}^B = D \underline{x}^B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

UE 12 - DGL

Trennung der Veränderlichen

a) $y'(x) = (y(x)+1)\sin(x)$ $\frac{dy}{dx} = (y+1)\sin(x)$

$\int \frac{1}{y+1}\,dy = \int \sin(x)\,dx$

$\ln|y+1| = -\cos(x) + c$

$y = \pm\tilde{c}\, e^{-\cos(x)} - 1$ $\tilde{c} = e^c$

$\rightarrow$ allg. Lsg. $y(x) = \pm\tilde{c}\, e^{-\cos(x)} - 1$

mit $y(\frac{\pi}{2}) = 4$ folgt $\tilde{c} = \pm 5$

$\rightarrow y(x) = \pm 5 e^{-\cos(x)} - 1$

oder Randbed. direkt in Integralgrenzen nutzen

$\int_4^y dy' \frac{1}{y'+1} = \int_{\pi/2}^x dx' \sin(x)$

$\ln|y+1| - \ln|5| = -\cos(x) + \underbrace{\cos(\tfrac{\pi}{2})}_{=0}$

$\ln|y+1| = \ln|5| - \cos(x)$

$y(x) = \pm 5 e^{-\cos(x)} - 1$

b) $y'' + \pi^2 y = 0$ Exponentialansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$

$\lambda^2 e^{\lambda x} + \pi^2 e^{\lambda x} = 0$ $\chi(\lambda) = \lambda^2 + \pi^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\pi$

allg. Lsg: $y(x) = \hat{c}_1 e^{i\pi x} + \hat{c}_2 e^{-i\pi x}$ $\rightarrow$ komplexe Lsg

bei komplexen Nullstellen von $\chi(\lambda)$ wird üblicherweise die allg. Lsg genutzt

$y(x) = c_1\cos(\pi x) + c_2\sin(\pi x)$

$\rightarrow$ reelle Lsg

mit Eulerschen Formeln kann geprüft werden, dass beide allg. Lsg übereinstimmen

mit $y(0) = 1$, $y(\frac{3}{2}) = -5$ folgt

$c_1 = 1$, $-5 = c_1 \underbrace{\cos(\tfrac{3\pi}{2})}_{=0} + c_2 \underbrace{\sin(\tfrac{3\pi}{2})}_{=-1} = -c_2$

spez. Lsg: $y(x) = \cos(\pi x) + 5\sin(\pi x)$

c) $y'(x) + y(x) = \frac{e^{-x}}{1+x^2}$ inhomogene DGL

· homogene Lsg:

$y' + y = 0 \quad \rightarrow \quad y_h(x) = A\, e^{-x}$

· inhomogene Lsg. mit Variation der Konstanten

$y_p(x) = A(x)\, e^{-x}$ in DGL:

$-A(x)e^{-x} + A'(x)e^{-x} + A(x)e^{-x} = \frac{e^{-x}}{1+x^2}$

$\Leftrightarrow \quad A'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$\Leftrightarrow \quad A(x) = \int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan(x) + c$

$y_p(x) = (\arctan(x) + c)\, e^{-x}$

allg Lsg: $y_h(x) + y_p(x) = A\, e^{-x} + (\arctan(x) + c)\, e^{-x}$

$= (\arctan(x) + C)\, e^{-x}$

mit $y(0) = 2$ folgt $C = 2$

spez Lsg: $y(x) = (\arctan(x) + 2)\, e^{-x}$

d) $y''' - 5y'' + 6y' = 0$ Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$

$\rightarrow \quad \lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = 0$

$\Leftrightarrow \quad \lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \lambda[(\lambda - 2)(\lambda - 3)] = 0$

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$

allg Lsg: $y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$