2.6 Normal modes (continued)

case: 2 coupled pendula

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{q}_1 + m\frac{g}{\ell}q_1 + k(q_1 - q_2) &= 0 \\ m\ddot{q}_2 + m\frac{g}{\ell}q_2 - k(q_1 - q_2) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ derived via Lagrange II}$$

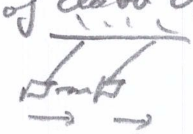
↳ transform into eigenvalue/-vector problem:

Eigenvalues: $\omega_1^2 = \frac{g}{\ell}$ Eigenvectors: $\begin{pmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

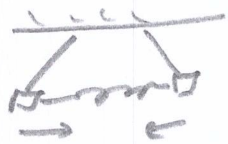
$\omega_2^2 = \frac{g}{\ell} + 2\frac{k}{m}$ $\begin{pmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Solutions: normal modes

$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}}(q_1 + q_2)$: motion of centre of mass, in-phase

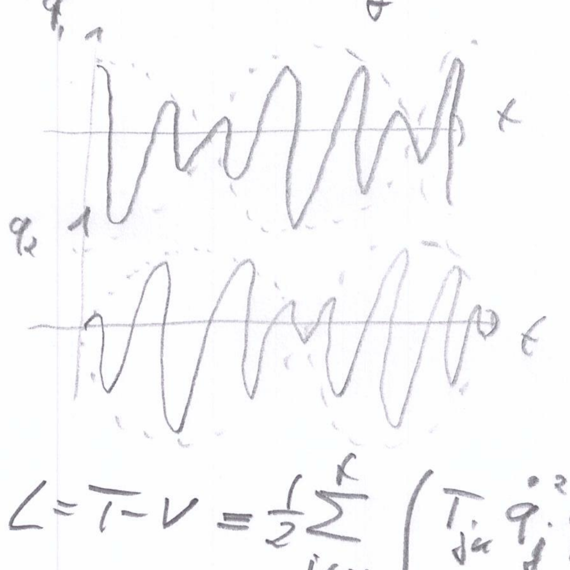


$Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}}(q_1 - q_2)$: relative motion, anti-phase



$\left(q_j(t) = \sum_\alpha A_j^{(\alpha)} Q_\alpha(t)\right)$

general solution: mode beating



general approach/case: $L = T - V = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{f}\left(T_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k - V_{jk}q_jq_k\right)$

$$\hookrightarrow \sum_{k=1}^{f}\left(V_{jk} - \omega^2 T_{jk}\right)A_k = 0 \Rightarrow \det\left(V_{jk} - \omega^2 T_{jk}\right) = 0 \Rightarrow \omega_1^2, \dots, \omega_f^2$$

general solution: $q_k(t) = \mathrm{Re}\left\{\sum_{\alpha=1}^{f} c_\alpha A_k^{(\alpha)} e^{i\omega_\alpha t}\right\}$, $\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = 0$

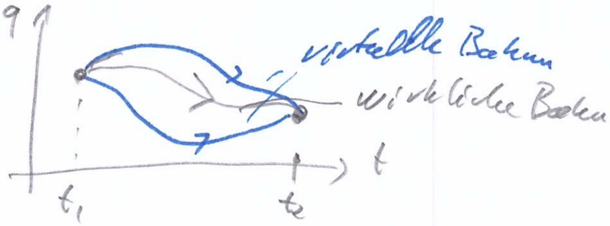
c_α determined by initial conditions

3. Das Hamiltonsche Prinzip

3.1 Variationsprinzip

Bisher: differenzielle Variation $\delta \underline{r}_i$ $\rightarrow$ D'Alembertsches Prinzip

Nun: Variation der ganzen Bahn $\rightarrow$ Hamiltonsches Prinzip



Idee: Die wirklich angenommene Bahn zeichnet sich dadurch aus, dass sie eine bestimmte Größe („Wirkung") extremal macht.

Allgemein: Sei $I: C^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ein Funktional

$$q(t) \longmapsto I[q] := \int_{t_1}^{t_2} dt\, F(q(t), \dot{q}(t), t)$$

Suche $q(t)$, so dass $\delta I[q] = 0$ (extremal!)

Annahme für variierte Bahnen:

Zu jedem t aus $t_1 \leq t \leq t_2$ wird dem Punkt $q(t)$ auf der realen Bahn ein variierter Bahnpunkt $q'(t)$ zugeordnet:

(i) $q'(t) \in C^2$ (2mal differenzierbar)

(ii) $\delta q(t) = q'(t) - q(t)$ — differenzielle Variation

(iii) $\delta t = 0$ — Zeit nicht variiert

(iv) $q'(t_1) = q(t_1)$, $q'(t_2) = q(t_2)$ — Anfangs- / End- | punkte fest $\Rightarrow \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$

Einschub: Variationsrechnung:

a) Extrema einer Funktion $f(x)$ einer Variablen:

$$\delta f(x) = f(x+\delta x) - f(x) = \frac{d}{dx} f(x)\, \delta x = 0 \quad \text{für beliebige } \delta x \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = 0 \quad \text{bei } x = x^* \text{ (Extremum)}$$

b) Extrema einer Funktion $f(x_1, \dots, x_N)$ mehrerer Variablen:

$$\delta f = f(x_1+\delta x_1, \dots, x_N + \delta x_N) - f(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \text{ für bel. } \delta x_i$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, \dots, N \text{ bei } x_i = x_i^* \text{ (Extremum)}$$

c) Extrema eines Funktionals $f[x] \equiv f[\overset{\text{Funktion}}{x(t)}]$ $(= f(x(t)))$

$$x_1, \dots, x_N \rightarrow x(t) \qquad x_i^* \rightarrow x^*(t)$$

$$\delta x_1, \dots, \delta x_N \rightarrow \delta x(t)$$

$$\delta f = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i \quad \rightarrow \delta f = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \underbrace{\frac{\delta f}{\delta x(t)}}_{\text{Funktionalableitung}} \delta x(t)$$

$$\hookrightarrow f[x] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, F(x(t))$$

$$\Rightarrow \delta f = f[x(t) + \delta x(t)] - f[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ F(x(t) + \delta x(t)) - F(x(t)) \right\}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt\, \underbrace{\frac{dF(x)}{dx}}_{\frac{\delta f}{\delta x(t)}} \delta x(t) = 0 \quad \text{für beliebige } \delta x(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta f}{\delta x(t)} = \frac{dF(x)}{dx} = 0 \quad \text{bei } x(t) = x^*(t) \text{ (Extremum)}$$

Bsp: $f[x, \dot{x}] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, F(x(t), \dot{x}(t))$

$$\Rightarrow \delta f = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \delta F(x(t), \dot{x}(t)) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right\} \overset{\text{partielle Integration}}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right\} \delta x(t)$$

$$\Rightarrow \text{Extremum: } \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad \text{(Euler-Lagrange-Gleichung für } x(t))$$

Anwenden auf $q(t)$, $F(q,\dot q,t)$:

$$0=\delta I[q]=\delta\int_{t_1}^{t_2}dt\;F(q,\dot q,t)\overset{(iv)}{=}\int_{t_1}^{t_2}dt\;\delta F(q,\dot q,t)\overset{(iii)}{=}\int_{t_1}^{t_2}dt\left[\frac{\partial F}{\partial q}\delta q+\frac{\partial F}{\partial \dot q}\delta \dot q\right]$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}dt\,\frac{\partial F}{\partial q}\delta q+\underbrace{\int_{t_1}^{t_2}dt\,\frac{\partial F}{\partial \dot q}\delta\dot q}_{f\quad g'}$$

$$\underset{\text{partielle Int.}}{=}\underbrace{\frac{\partial F}{\partial \dot q}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2}}_{\substack{f\quad g\\ =0}}-\int_{t_1}^{t_2}dt\underbrace{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot q}\right)\delta q}_{f'\quad g}$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}dt\left\{\frac{\partial F}{\partial q}-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot q}\right)\right\}\underbrace{\delta q}_{\text{frei variierbar}}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial F}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot q}=0$$

Fazit: Differenzialgleichung ist äquivalent zum Integralprinzip $\delta I[q]=0$

3.2 Hamiltonsches Wirkungsprinzip

Annahmen:

(i) Holonome Zwangsbedingungen → generalisierte Koordinaten $q_1,\dots,q_f$

(ii) Konservative Kräfte → Lagrange-Funktion $L(q_1,\dots,q_f,\dot q_1,\dots,\dot q_f,t)=T-V$

Idee: (a) $F=L$ (b) Verallgemeinerung auf mehrere Variablen $x\to q_1,\dots,q_f$, $\dot x\to\dot q_1,\dots,\dot q_f$

$\Rightarrow$ Euler-Lagrange-DGL $\triangleq$ Lagrange-Gleichungen 2. Art

Integralprinzip $\delta I=0$ $\triangleq$ Hamiltonsches Wirkungsprinzip $\delta W=0$

Wirkungsfunktional $W:=\int_{t_1}^{t_2}dt\,L(q_1(t),\dots,\dot q_1(t),\dots,t)$

Berechne:

$$0 = \delta W = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k}\,\delta q_k(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\,\frac{d}{dt}\delta q_k(t) \right\}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{f} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \right\} \delta q_k(t)$$

Für beliebige Variationen $\delta q_k(t)$, $k = 1, \dots, f$ folgt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

Bsp: 1-dimensionaler harmonischer Oszillator

$$L = \frac{1}{2} m \dot q^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

$$\Rightarrow 0 = \delta W = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \delta \left\{ \frac{1}{2} m \dot q^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \right\}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ m \dot q\, \delta \dot q - m \omega^2 q\, \delta q \right\}$$

$$\underset{\text{partielle Int.}}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ -m \ddot q - m \omega^2 q \right\} \delta q$$

$$\Rightarrow \ddot q + \omega^2 q = 0$$

Bem: • Integralprinzip (betrifft ganze Bahn)

• teleologisch: auf ein Zweck gerichtet

• unabhängig von Koordinatenwahl

• $[\text{Wirkung}] = \underset{kg\,\frac{m^2}{s^2}}{[\text{Energie}]} \times \underset{s}{[\text{Zeit}]} = \underset{kg\,\frac{m}{s}}{[\text{Impuls}]} \times \underset{m}{[\text{Ort}]}$

vgl. Plancksches Wirkungsquantum $[\hbar] = Js$ $(h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\,Js)$
$(\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}055 \cdot 10^{-34}\,Js)$

3.3 Eichtransformation

Lagrange-Funktion nicht eindeutig durch Lagrange-Gleichungen festgelegt.

Satz: Die Eichtransformation $L \mapsto L' = L + \frac{d}{dt} M(q,t)$ mit beliebiger Eichfunktion M lässt die Lagrange-Gleichungen invariant.

Folgerung: $\delta \int L' \, dt = 0 \Leftrightarrow \delta \int L \, dt = 0$

Beweis:
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot q_k} \frac{d}{dt} M(q,t)\right) - \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{d}{dt} M(q,t)\right)$$

weil $\frac{d}{dt} M(q,t) = \sum_{l=1}^{f} \frac{\partial M}{\partial q_l} \dot q_l + \frac{\partial M}{\partial t}$ folgt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} \underbrace{+ \frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot q_k}\left(\sum_{l=1}^{f} \frac{\partial M}{\partial q_l} \dot q_l + \frac{\partial M}{\partial t}\right)}_{= \frac{\partial M}{\partial q_k} \text{ (M darf nicht von } \dot q_k \text{ abhängen)}} - \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{d}{dt} M(q,t)\right)}_{=0}$$

$\square$

Bsp: 1D harmonischer Oszi:

$$L = \frac{m}{2} \dot q^2 - \frac{m}{2} \omega^2 q^2 \quad \text{und} \quad M(q) = \frac{m}{2} \omega^2 q^2 \Rightarrow \frac{d}{dt} M = m\omega^2 q \dot q$$

$$\Rightarrow L' = \frac{m}{2} \dot q^2 - \frac{m}{2} \omega^2 \left(q^2 - 2 q \dot q\right)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q} = m\ddot q + \cancel{m\omega^2 \dot q} - \left(-m\omega^2 q + \cancel{m\omega^2 \dot q}\right) \Rightarrow \ddot q + \omega^2 q = 0$$