1. [*Computer*] **Ein numerischer Blick in den Phasenraum**

In der Vorlesung haben wir den Phasenraum kennengelernt. Dieser ist für ein Problem mit N Freiheitsgraden durch den $2N$-dimensionalen Raum der generalisierten Koordinaten $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots\ q_N)$ und der zugehörigen konjugierten Impulse $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$ gegeben. Ein Punkt $\gamma = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ des Phasenraums beschreibt den vollständigen Zustand unseres Systems. Zudem können wir jedem Punkt des Phasenraums einen Fluss, $\dot{\gamma} = (\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}})$ zuordnen, der gerade unseren kanonischen Bewegungsgleichungen entspricht. Es ist wichtig, sich hier zu verbildlichen, dass es sich bei diesem Fluss um ein Feld handelt. Für jeden möglichen Punkt γ des Phasenraums können wir diesen Fluss *zu jedem Zeitpunkt* aufstellen. Für ein *von der Zeit unabhängiges Problem* gilt insbesondere, dass dieses Fluss-Feld *zeitlich konstant* ist. Wählen wir also einen Anfangszustand γ_0, wird dieser Punkt dem vorgeschriebenen Fluss im Phasenraum folgen. Dies ist eine alternative Betrachtung der Zeitentwicklung des Systems. Wir wollen dies nun numerisch veranschaulichen und wählen als simples Beispielsystem das *Ebene Pendel* von Blatt 7, Aufgabe 14. Dessen Hamilton-Funktion lautet

$$H = \frac{1}{2}\frac{p_\varphi^2}{m\ell^2} - m\ell^2\omega^2\,\cos(\varphi)$$

mit der Frequenz $\omega^2 = g/\ell$.

(a) Leite mittels der Hamilton-Funktion die beiden kanonischen Bewegungsgleichungen des Systems her. Wir wollen zudem zur Vereinfachung unserer Betrachtung eine reskalierte Variable $\tilde{p}_\varphi = \frac{p_\varphi}{m\ell^2}$ einführen. Wie lauten die kanonischen Bewegungsgleichungen für diese neue Variable?

(b) Implementiere die Funktion `eq_of_motion`, die einen Phasenraumpunkt $(\varphi, \tilde{p}_\varphi)$ (Variable `y`) erhält und die entsprechenden Ableitungen $(\dot{\varphi}, \dot{\tilde{p}}_\varphi)$ zurückgibt. Führe dann die Zelle mit der Überschrift **Flow Field in Phase-Space** aus.

(c) Die Funktion `phase_space_trajectory` nutzt die von dir implementierten Bewegungsgleichungen, um eine Trajektorie $(\varphi(t), p_\varphi(t))$ zu erzeugen. Rufe diese Funktion in der Zelle **Phase Space Trajectories** für die Beispiel-Werte `y_init`$= [10°, 0.0]$, $[90°, 0.0]$, $[179°, 0.0]$ und $[170°, -1.0]$ auf und plotte dein Ergebnis in den vorherigen Graph. Beschreibe die Bewegung.
Hinweis: *Deine Winkelangaben müssen zum Radialmaß konvertiert werden. Dies ist einfach mit der Funktion* `radians` *des* `numpy`*-Pakets möglich.*

(d) Diskutiert, was mit dem Fluss (den “Pfeilen” in eurem Plot) passiert, wenn man ein Problem betrachtet, welches explizit von der Zeit abhängt.

Info: Adam Wysocki, E2 6, Zi. 4.26, a.wysocki@lusi.uni-sb.de
Marc Thome, E2 6, Zi. 4.23, thome.marc@lusi.uni-sb.de
Joshua Weißenfels, s9joweis@uni-saarland.de
Nic Collingro, nico00001@uni-saarland.de

2. [*Präsenz*] **Hamilton-Formalismus in Kugelkoordinaten**

Wir wollen den Hamilton-Formalismus nun in Kugelkoordinaten anwenden. Dazu betrachten wir ein sphärisches Pendel der Länge ℓ und Masse m, welches nicht nur in einer Ebene schwingt, sondern sich auch frei um seinen Aufhängepunkt drehen kann. Dieses Problem lässt sich einfach in Kugelkoordinaten beschreiben, da wir die Auslenkung zur z-Achse durch den Winkel θ beschreiben können, während der Winkel φ die Drehung der Schwingungsebene angibt.

(a) Stelle die Lagrange-Funktion des Problems auf und berechne die generalisierten Impulse p_θ und p_φ. Hinweis: *Auf Blatt 4, Aufgabe 7 wurde bereits die kinetische Energie in Kugelkoordinaten bestimmt:* $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2(\theta))$.

(b) Stelle die Hamilton-Funktion $H = p_\theta\,\dot{\theta} + p_\varphi\,\dot{\varphi} - L$ des Problems auf und berechne die kanonischen Bewegungsgleichungen. Gibt es eine Erhaltungsgröße und wenn ja, welche?
Hinweis: *Bedenke dabei, dass* $H \equiv H(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi)$ *eine Funktion der generalisierten Impulse sein muss, um die korrekten Bewegungsgleichungen zu erhalten.*

Aus der Vorlesung wissen wir, dass wir durch $H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L$ immer die korrekte Hamilton-Funktion H erhalten. Diese kann (muss aber nicht) $H = T + V$ entsprechen. Letzteres ist immer dann der Fall, wenn die Wahl unserer generalisierten Koordinaten q_i *natürlich* ist. Darunter versteht man, dass der Zusammenhang zwischen kartesischen und generalisierten Koordinaten *nicht explizit* von der Zeit abhängt.

(c) Gib die kartesischen Koordinaten x, y und z in Abhängigkeit von θ und φ an. Ist die Wahl der Koordinaten natürlich?

Auf Blatt 4, Aufgabe 7 haben wir im letzten Aufgabenteil eine Perle auf einem rotierenden Draht betrachtet. Die Aufstellung der Lagrange-Funktion verlief analog zum sphärischen Pendel, allerdings wurde $\dot{\varphi}$ durch die konstante Winkelgeschwindigkeit ω ersetzt.

(d) Ist die Wahl der generalisierten Koordinaten in diesem Beispiel immer noch natürlich? Was hat sich am dem Problem verändert, dass die Energie-Erhaltung nicht mehr gegeben ist?

Info: Adam Wysocki, E2 6, Zi. 4.26, `a.wysocki@lusi.uni-sb.de`
Marc Thome, E2 6, Zi. 4.23, `thome.marc@lusi.uni-sb.de`
Joshua Weißenfels, `s9joweis@uni-saarland.de`
Nic Collingro, `nico00001@uni-saarland.de`

Präsenzübung 8

Aufgabe 2 - Hamilton-Formalismus in Kugelkoordinaten

a) $T = \frac{1}{2} m |v|^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta) \right)$

mit $r = R = \text{const.} \Rightarrow \dot{r} = 0$

$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m R^2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta) \right)$

$U = mgh = mgR(1 - \cos(\theta))$

$\Rightarrow L = T - U$

$= \frac{1}{2} m R^2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta) \right) - mgR(1 - \cos(\theta))$

$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2 \dot{\theta}$ $\qquad$ $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2 \sin^2(\theta) \dot{\varphi}$

$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}$ $\qquad$ $\Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2 \sin^2(\theta)}$

b) $H = p_\theta \dot{\theta} + p_\varphi \dot{\varphi} - L$

$= \frac{p_\theta^2}{mR^2} + \frac{p_\varphi^2}{mR^2 \sin^2(\theta)} - \frac{1}{2} m \cancel{R^2} \left[\left(\frac{p_\theta^{2}}{m\cancel{R^2}} \right)^{\cancel{2}} + \left(\frac{p_\varphi^{2}}{m\cancel{R^2} \sin^4(\theta)} \right)^{\cancel{2}} \mathrm{si}\cancel{n^2}(\theta) \right]$

$+ mgR(1 - \cos(\theta))$

$$= \frac{1}{2mR^2}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{mR^2\sin^2(\theta)}\right) + mgR\,(1-\cos(\theta))$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2} \qquad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{1}{mR^2}\,\frac{\cos(\theta)}{\sin^3(\theta)} - mgR\sin(\theta)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2\sin^2(\theta)} \qquad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$$

$\Rightarrow$ p_φ ist eine Erhaltungsgröße und entspricht dem Drehimpuls um die z-Achse.

c)
$$\left.\begin{aligned} x &= R\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y &= R\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z &= -R\cos(\theta) \end{aligned}\right\}$$

hängt nicht explizit von der Zeit ab $\Rightarrow$ natürliche Koordinaten

(θ und φ hängen natürlich immer noch von der Zeit ab!)

↳ Ausgangsposition: Pendel hängt nach unten

d)
$$\left.\begin{aligned} x &= R\sin(\theta)\cos(\omega t) \\ y &= R\sin(\theta)\sin(\omega t) \\ z &= -R\cos(\theta) \end{aligned}\right\}$$

explizite Zeitabhängigkeit $\Rightarrow$ keine natürlichen Koordinaten, $H \neq E$

Die Energie ist nicht erhalten, da der Ring von außen angetrieben wird.