

0. Overview

- analytical mechanics: derive equations of motion using different frameworks of varying mathematical complexity
- deterministic systems: - determined by initial conditions
- causal: generated by forces

1. Newtonian mechanics

1.1 Approach

Kinematics & dynamics of systems of mass point without constraints

↑ ↑
framework newton based
using energy on forces
instead of forces
"geometry of motion"

1.2 Newton's laws of motion

I: A body remains at rest or in motion at a constant speed in a straight line, unless it is acted upon by a force

II: The net force on a body is equal (i) to the body's acceleration multiplied by its mass
(ii) to the rate of change of its momentum.

III: If two bodies exert forces on each other, these forces have the same magnitude but opposite directions.

IV: Forces obey the superposition principle.

• event: $(\underline{r}(t), t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$

• dynamic variable: $\underline{r}(t)$: trajectory

$$\underline{v}(t) = \frac{d}{dt} \underline{r}(t) = \underline{\dot{r}}(t) \text{ velocity}$$

• $I \Leftrightarrow$ system of inertia (Galilean transformation)

$$\underline{r}(t) = \underline{R} \underline{r}'(t') + \underline{v}_0 t + \underline{x}_0$$

$$t = t' + t_0, \quad \underline{R}: \text{rotational matrix}$$

• Newton's laws of motion are Galilean invariant

↳ existence of absolute space

↳ all inertial frames share a universal time

• II $\Leftrightarrow \underline{\vec{F}} = m \frac{d^2}{dt^2} \underline{r}(t)$ has a unique solution

56

for initial conditions $(\underline{r}_0, t_0) \Rightarrow \underline{r}(t; \underline{r}_0, t_0)$

• III $\Leftrightarrow$ no external forces: overall momentum is conserved

• IV $\hookrightarrow$ force add like vectors

• mass : a measure of the body's inertia = gravitational mass

$$\underline{\vec{F}}^{(12)} = -G m^{(1)} m^{(2)} \frac{\underline{r}^{(1)} - \underline{r}^{(2)}}{|\underline{r}^{(1)} - \underline{r}^{(2)}|^3}, \quad G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{kg}^3}{\text{kg s}^2}$$

2. Das d'Alembertsche Prinzip

6

2. D'Alembertsches Prinzip

1. Zwangsbedingungen und Zwangskräfte
2. Virtuelle Verrückungen
3. D'Alembertsches Prinzip der virtuellen Arbeit
4. Generalisierte Koordinaten
5. Lagrange-Gleichungen 2. Art

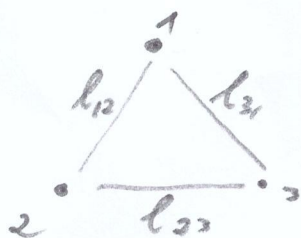
2.1 Zwangsbedingungen und Zwangskräfte

Ein System von N Massepunkten hat $f=3N$ **Freiheitsgrade**, wenn keine **Zwangsbedingungen** vorliegen.

Idee: Verminderung der Zahl der Freiheitsgrade durch

ii) **holonome** Zwangsbedingungen ("integrabel" / ganz gesetzt) $f_M(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0$, $M=1, \dots, A$ (unabhängig: $\text{Rang}\left(\frac{\partial f_M}{\partial x_i}\right) = A$)

Bsp.: Starrer Körper aus 3 Teilchen



$$\left. \begin{aligned} f_1 &= |x_1 - x_2| - l_{12} = 0 \\ f_2 &= |x_2 - x_3| - l_{23} = 0 \\ f_3 &= |x_3 - x_1| - l_{31} = 0 \end{aligned} \right\} \text{Abstände fest}$$

$$\Rightarrow f = 3N - A = 3 - 3 = 0$$

allgemein: Starrer Körper aus N Teilchen: $f_M = |x_i - x_j| - l_{ij} = 0$

N	anzahl Gleichungen	A	$f = 3N - A$
1	0	0	3
2	1	1	5
3	2	3	6
4	3	6	$4 \cdot 3 - 6 = 6$
5	3	9	$5 \cdot 3 - 9 = 6$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$N \geq 4$	3	$3N - 6$	6



(3x Translation, 3x Rotation)

Die Bahn $r_i(t)$ sollen 1 unabhängige Zwangsbedingungen

erfüllen: $\int_M (r_1(t), r_2(t), \dots, r_N(t)) dt = 0 \quad \forall t$

↳ Totale Zeitabhängigkeit: $\frac{dr_i}{dt}$

$$\frac{df_M}{dt} = \sum_{i=1}^N \underbrace{\nabla_{r_i} f_M}_{\text{Gradient}} \cdot \dot{r}_i + \frac{\partial f_M}{\partial t} = 0$$

↳ differentielle Schreibweise: (vollständiges Differential)

$$df_M = \sum_{i=1}^N \nabla_{r_i} f_M \cdot dr_i + \frac{\partial f_M}{\partial t} dt = 0$$

(ii) **nicht holonom** Zwangsbedingungen

$$\sum_{i=1}^N q_{M_i} (r_1, \dots, r_N, t) \cdot dr_i + q_{M_0} (r_1, \dots, r_N, t) dt = 0 \quad M=1, \dots, A$$

Pfaffsche Differenzialform (nicht integrabel, d.h. es existiert

kein integrierbarer Faktor g_M , so dass: $\sum g_M q_{M_i} \cdot dr_i + g_M q_{M_0} dt = df_M$

also $g_M q_{M_i} = \nabla_{r_i} f_M$)

Bedeutung: beliebige Position $r_1, \dots, r_N$ zulässig, aber Bewegung lokal eingeschränkt. (etwa Geschwindigkeit längs der Bahn

$$\sum_{i=1}^N q_{M_i} \cdot \dot{r}_i + q_{M_0} = 0)$$

Bsp: • Reagenium mit Auto auf Ebene: Jeder Punkt erreichbar, aber lokale Bewegung (mountain) davon leicht festgelegt gegeben.

• Schlittschuhlaufen: Kufen erlauben nur Vor & Zurück, aber nicht Seitwärts.

(iii) In beiden Fällen:

rheonom Zwangs bedingen (zeitabhängig)

skleonom ——— (nicht explizit zeitabhängig, statisch)

(iv) Ungleichungen (z.B. Gas in Behälter mit Wänden)

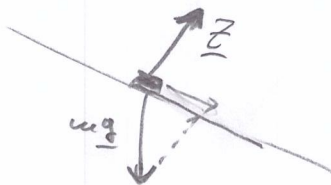
$\Rightarrow$ Bewegungsgleichungen: $m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underbrace{\underline{F}_i}_{\text{äußere Kräfte}} + \underbrace{\sum_{j=1}^N \underline{F}_{ij}}_{\text{innere Kräfte}} =: \underline{X}_i \quad i=1, \dots, N$

müssen unter Nebenbedingungen $\left| \begin{array}{l} f_k(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, t) = 0 \\ \text{oder} \\ \sum_{i=1}^N \underline{a}_i \cdot \underline{r}_i + \underline{a}_0 = 0 \end{array} \right.$ gelöst werden.

Idee: Nebenbedingungen sollen durch **Zwangskräfte** $\underline{Z}_i$ erzwingen werden

$$m \ddot{\underline{r}}_i = \underline{X}_i + \underline{Z}_i \quad i=1, \dots, N$$

Bsp: 2D-Bewegung auf schiefer Ebene $\rightarrow$ effektive 1D-Bewegung



2.2 Virtuelle Verschiebungen

virtuelle Verschiebung $\{\delta \underline{r}_i\}$: infinitesimale Änderung der Koordinaten, die zu fester Zeit ($\delta t = 0$) die (holonom bzw. nichtholonom) Zwangsbedingungen erfüllen.

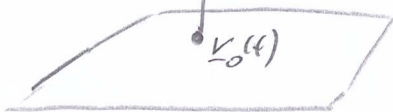
(Vgl.: reale Verschiebungen $d\underline{r}_i$ im Zeitintervall dt entlang der Bahn)

$$\delta f_k := \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_k}{\partial \underline{r}_i} \cdot \delta \underline{r}_i = 0 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^N \underline{a}_i \cdot \delta \underline{r}_i = 0$$

Bsp: Bewegung in Ebene: $\underline{n} \cdot (\underline{r} - \underline{r}_0(t)) = 0$

$\uparrow \underline{n}$: Normalenvektor

Bewegung der Ebene



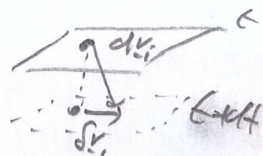
$\Rightarrow$ holonom Zwangsbedingung entspricht N Massenpunkten

$$f(\underline{r}_i) = \underline{n} \cdot (\underline{r}_i - \underline{r}_0(t)) = 0 \quad i=1, \dots, N$$

$$\Rightarrow df = \underline{n} \cdot (d\underline{r}_i - \underline{v}_0(t) dt) = 0 \quad \text{mit} \quad \underline{v}_0 = \frac{d}{dt} \underline{r}_0(t)$$

$$\text{also i.A.:} \quad \underline{n} \cdot d\underline{r}_i = \underline{n} \cdot \underline{v}_0(t) dt \neq 0$$

$$\text{also} \quad df = \underline{n} \cdot \delta \underline{r}_i = 0 \Rightarrow \delta \underline{r}_i \perp \underline{n} \quad \text{bei festgehaltener Ebene}$$



Allgemeine Forderung: $\sum_{i=1}^N \ddot{x}_i \delta x_i = 0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^N (m_i \ddot{x}_i - K_i) \cdot \delta x_i = 0$ d'Alembert'sches Prinzip

• Differenzialprinzip / Variationsprinzip

Der wirklichen angenommen Zustand ist ein Extremalzustand (in dem Sinne, dass die gesamte virtuelle Arbeit Null ist.)

§ Variationsprinzip mit Nebenbedingungen:

(allg. Notation: $\ddot{x}_j \rightarrow \ddot{x}_j$, $K_j \rightarrow K_j$, $\phi_j^\mu \rightarrow \phi_j^\mu$ Koordinaten $i=1, \dots, N, j=1, \dots, 3N$)

$$\sum_{j=1}^{3N} (m_j \ddot{x}_j - K_j) \delta x_j = 0 \quad \text{Nebenbedingungen} \quad \sum_{j=1}^{3N} \phi_j^\mu \delta x_j = 0, \mu=1, \dots, 1$$

Lösung mit der Methode der **Lagrange-Multiplikation**

Falls δx_i frei wählbar, dann würde $(m_j \ddot{x}_j - K_j) = 0$ gelten

Idee: Umschreiben, sodass ein Satz von Faktoren frei variierbar ist

(i) Addieren Nebenbedingungen mit Lagrange-Multiplikation λ_μ :

$$\sum_{j=1}^{3N} \left(m_j \ddot{x}_j - K_j - \sum_{\mu=1}^1 \lambda_\mu \phi_j^\mu \right) \delta x_j = 0$$

(ii) Eliminieren $\delta x_1, \dots, \delta x_1$ aus den Nebenbedingungen, dann sind

$\delta x_{1+1}, \dots, \delta x_N$ frei variierbar.

(iii) Bestimme $\lambda_1, \dots, \lambda_1$ sodass

$$m_j \ddot{x}_j - K_j - \sum_{\mu=1}^1 \lambda_\mu \phi_j^\mu = 0 \quad \text{für } j=1, \dots, 1$$

(λ_μ für $\lambda_\mu^{(1)}$ als Funktionen von $\ddot{x}_j^{(1)}$)

$$\Rightarrow \sum_{j=1+1}^{3N} \left(m_j \ddot{x}_j - K_j - \sum_{\mu=1}^1 \lambda_\mu^{(1)} \phi_j^\mu \right) \delta x_j = 0$$

frei variierbar

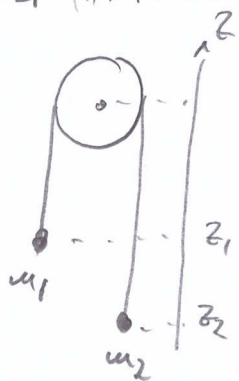
$$\Rightarrow m_j \ddot{x}_j - K_j - \sum_{\mu=1}^1 \lambda_\mu^{(1)} \phi_j^\mu = 0 \quad \text{Lagrange-Gleichungen Typ 1}$$

"Zwangsbedingung"

Für holonom Zwangsbedingungen $m_j \ddot{x}_j - K_j - \sum_{\mu=1}^1 \lambda_\mu \frac{\partial \phi_\mu}{\partial x_j} = 0$

Bsp: Atwoodsche Fallmaschine

11



$$(m_1 \ddot{z}_1 - X_1) \delta z_1 + (m_2 \ddot{z}_2 - X_2) \delta z_2 = 0$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $-m_1 g$ $-m_2 g$

$$z_1 + z_2 = \text{const.} \Rightarrow \ddot{z}_1 = -\ddot{z}_2$$

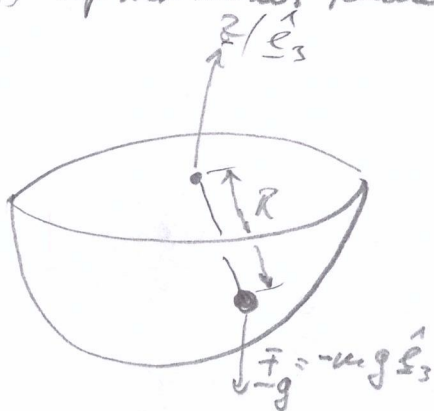
(Zwangsgl.)

$$\delta z_1 = -\delta z_2$$

$$\Rightarrow [(m_1 + m_2) \ddot{z}_1 + (m_1 - m_2) g] \delta z = 0 \quad \text{für bel. } \delta z$$

$$\stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \ddot{z}_1 = -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

(ii) Sphärisches Pendel



$$\text{Zwangsbedg: } f(r(t)) = r(t)^2 - R^2 = 0$$

$$\text{Trick: } \dot{f}(r) = 2r \cdot \dot{r} = 0$$

$$\dot{f}''(r) = 2\dot{r}^2 + 2r \cdot \ddot{r} = 0$$

$$\text{Bewegungsgl: } m\ddot{r} = m\underline{g} + \underline{Z} \stackrel{!}{=} m\underline{g} + 2\lambda \underline{r}$$

$$\underline{Z}: \text{in Richtung } \underline{r} \text{ plausibel} \Rightarrow \text{Annahme: } \underline{Z} = 2\lambda \underline{r}$$

$$\Rightarrow m\underline{r} \cdot \ddot{r} = m\underline{r} \cdot \underline{g} + 2\lambda \underbrace{\underline{r} \cdot \underline{r}}_{=R}$$

$$-m\dot{r}^2 = m\underline{r} \cdot \underline{g} + 2\lambda R^2 \Rightarrow 2\lambda = -\frac{m}{R^2} (\dot{r}^2 + \underline{r} \cdot \underline{g})$$

$$\Rightarrow \underline{Z} = -\frac{m}{R^2} (\dot{r}^2 + \underline{r} \cdot \underline{g}) \underline{r} \quad (\text{Geschwindigkeit hat Abhängigkeit!})$$

$\uparrow$
 Zentrifugal- & Coriolis
 Kraft

$$\Rightarrow \ddot{r} = \underline{g} - \frac{1}{R^2} (\dot{r}^2 + \underline{r} \cdot \underline{g}) \underline{r}$$

$$(\text{Allgemein: } \underline{Z} = \lambda \underline{\nabla} f \Rightarrow \underline{Z} = \lambda 2\underline{r})$$

Gradient $\perp$ auf Fläche $f=0$, wie auch $\underline{Z}$, wenn Tangentialbew.