

3 Hamiltonian principle

26a

3.1 variational problem

D'Alembert principle $\leftrightarrow$ differential variation (virtual displacements δq_i)

Hamiltonian principle $\leftrightarrow$ variation of entire trajectory

- Define an action functional $W: C^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $q(t) \mapsto W[q] := \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t)$

such that $\delta W[q] = 0$ for the real $q(t)$.

- Variations $q'(t)$ of $q(t)$: $t_1 \leq t \leq t_2$

(i) $q'(t) \in C^2$

(ii) $\delta q(t) = q'(t) - q(t)$

(iii) $\delta t = 0$

(iv) $q'(t_1) = q(t_1)$
 $q'(t_2) = q(t_2)$

3.2 Hamiltonian principle

- $0 = \delta W[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^f \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} \delta q_k \right\}$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^f \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right\} \delta q_k$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0 \quad k=1, \dots, f \quad (\text{Euler-Lagrange equations})$$

3.3 Gauge transformation

Theorem: The gauge transformation $L \rightarrow L' = L + \frac{d}{dt} M(q, t)$

leaves the Euler-Lagrange equations invariant.

4 Symmetrie & Erhaltungssätze

27

4.1 Noether - Theorem

4.2 Räumliche Translationsinvarianz

4.3 Rotationsinvarianz (Isotropie)

4.4 Zeitliche Translationsinvarianz

4.5 Das Zweikörperproblem

4.1 Noether - Theorem

Idea: Kontinuierliche Transformation, unter denen das physikalische System ^{invariant} invariant ist, entsprechen **Erhaltungsgrößen**

(**Integrale der Bewegung, Konstanten der Bewegung**)

- Voraussetzung: **autonom** (nicht explizit zeitabhängig) System mit f Freiheitsgraden und Lagrange-Funktion $L(q_i, \dot{q}_i, t)$

Theorem von Emmy Noether:

Die Lagrange-Funktion $L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$ eines autonomen Systems sei unter der Transformation $q \rightarrow \underline{h}^S(q)$ invariant (S : kontinuierlicher Parameter und $\underline{h}^{S=0}(q) = q$). Dann gibt es ein Integral der Bewegung

$$I(q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{d}{ds} \underline{h}_j^S(q_j) \right) \Big|_{S=0} \quad \text{*) } \underline{h}^S(q) = q + S \frac{d\underline{h}^S(q)}{ds} \Big|_{S=0} + \mathcal{O}(S^2)$$

Beweis: $q = q(t)$ Lösung der Lagrange-Gleichungen

$$\Rightarrow q(s, t) = \underline{h}^S(q, t) \quad \text{,, weil invariant.}$$

$$(i) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_j}, \quad (ii) \frac{d}{ds} L(q(s, t), \dot{q}(s, t)) = \sum_{j=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{dq_j}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{ds} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} I(q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^f \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{d}{ds} \underline{h}_j^S(q_j) \right) \Big|_{S=0} \right] = \sum_{j=1}^f \left[\underbrace{\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right)}_{= \frac{\partial L}{\partial q_j}} \frac{dq_j}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{d\dot{q}_j}{ds} \right)}_{= \frac{d\ddot{q}_j}{ds}} \right]$$

$$\stackrel{(ii)}{=} \frac{d}{ds} L \stackrel{\text{invariant}}{=} 0$$

$$\text{*) } \frac{d\underline{h}^S(q)}{ds} = \frac{d\underline{h}^S(q)}{ds} = \frac{dq}{ds} + \frac{d}{ds} \frac{d\underline{h}^S(q)}{ds} \Big|_{S=0} + \mathcal{O}(S^2)$$

• Konervative Kräfte, keine Zwangsbedingungen: $L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\underline{r}}_i^2 - V(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N)$

• Translations in $\underline{e}_x$ -Richtung: $\underline{h}^s: \underline{r}_i \rightarrow \underline{r}_i + s \underline{e}_x \quad i=1, \dots, N$

$\Rightarrow$ **Translationsinvarianz** (entlang x-Achse)

$$\Rightarrow L(\underbrace{\underline{h}^s(\underline{r}_i), \dot{\underline{r}}_i}_{(\underline{h}^s(\underline{r}_1), \dots, \underline{h}^s(\underline{r}_N), \dot{\underline{r}}_1, \dots, \dot{\underline{r}}_N)}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \underbrace{\left[\frac{d}{ds} (\underline{r}_i + s \underline{e}_x) \right]^2}_{\left[\frac{d}{ds} (\underline{r}_i) \right]^2 = \dot{\underline{r}}_i^2} - V(\underline{r}_i + s \underline{e}_x + \dots) = L(\underline{r}_i, \dot{\underline{r}}_i)$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{ds} = - \sum_{i=1}^N (\underline{\nabla}_{\underline{r}_i} \cdot \underline{e}_x) V = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial x_i} \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{Keine äußere Kraft in x-Richtung})$$

Integral der Bewegung:

$$I = \sum_{i=1}^N \underline{\nabla}_{\underline{r}_i} L \frac{d\underline{h}}{ds} \bigg|_{s=0} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{e}_x = \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i = P_x \quad (\text{x-Komponente des Gesamtimpulses})$$

Translationsinvarianz in x-Richtung $\rightarrow$ Erhaltung des x-Komponente des Gesamtimpulses

• **Konjugierte verallgemeinl. Impulse** $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$

Wähle $q_1 = s$ als verallgemeinl. Koordinate! $\underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \dots, q_f, t) = q_1 \underline{e}_x + \underline{r}_i(q_2, \dots, q_f, t)$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial q_1} \underline{r}_i = \underline{e}_x, \quad \frac{\partial \dot{\underline{r}}_i}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \underline{r}_i = \underline{e}_x$$

$$\underline{\dot{r}}_i = \sum_{j=1}^f \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 0 \quad (\Rightarrow) \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \text{const}$$

Invarianz

Erhaltungssatz

• $\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$ dann heißt q_1 **zyklische Koordinate** (und ihr konjugierter Impuls ist Erhaltungssatz)

Bsp: (i) Teilchen für Potenzial $V(\underline{r}) = V(x, z)$

29

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} = P_x = \text{const}$$

$$\text{Integral der Bewegung: } \underbrace{\mathcal{L}}_{\substack{\nabla \cdot \mathcal{L} \\ = \underline{e}_x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{ds} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = P_x$$

(ii) 2 Teilchen mit Poisson Wechselwirkung: $V(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = V(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)$

Traces liefert, vorausgesetzt abhängig x, y, z - Richtg:

$$\underline{h}^S(\underline{r}_i) = \underline{r}_i + \sum_{j=x,y,z} s_j \underline{e}_j$$

$\Rightarrow$ Übungsblatt 5