

1. [Punkte] Vertikal angeregtes Pendel am Computer

In dieser Aufgabe soll das Verhalten eines vertikal angeregten Pendels numerisch untersucht werden. Die Bewegungsgleichung wurde bereits in einer vorherigen Übung hergeleitet. Ein Pendel der Länge l mit Masse m hängt reibungsfrei an einem Aufhängepunkt, der sich mit Amplitude A und Frequenz Ω in vertikaler Richtung harmonisch bewegt:

$$x_A(t) = 0, \quad y_A(t) = A \cos(\Omega t).$$

Die Bewegungsgleichung für den Auslenkungswinkel $\varphi(t)$ lautet:

$$\ddot{\varphi} = \left[\frac{A}{l} \Omega^2 \cos(\Omega t) - \frac{g}{l} \right] \sin \varphi.$$

Hinweis: Ergänzend zu dieser Aufgabe gibt es auf der Moodle-Plattform ein Python-Programm namens `kapitza_pendulum_exercise.0.ipynb`. Den Code müsst du an den mit `XXX` gekennzeichneten Stellen ergänzen.

- (a) Wir benutzen die Python Funktion `solve_ivp` zur Lösung unserer Bewegungsgleichung. Als Eingabe erwartet `solve_ivp` ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{y}, t),$$

weshalb wir zunächst unsere Bewegungsgleichung auf ein System erster Ordnung reduzieren müssen. Wir definieren $\omega = \dot{\varphi}$. Nutze dies, um dies um ein gekoppeltes System aus Differentialgleichung für das vertikal angeregte Pendel aufzustellen, d.h. finde eine vektorielle Funktion $\mathbf{F}$, so dass

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \mathbf{F}(\varphi, \omega, t).$$

- (b) Implementiere die Funktion `eq_of_motion(t, y)` indem du $\mathbf{F}(\varphi, \omega, t)$ in Python-Code übersetzt. Die Funktion erwartet dabei als Input eine Liste `y`, wobei wir `y[0]= $\varphi$` und `y[1]= $\omega$` identifizieren, und sollte die Liste `[ $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\omega}$ ]` zurückgeben.
- (c) Integriere die Bewegungsgleichung für die Zeit $t \in [0, 10]$. Benutze exemplarisch die Parameter $A = 0.5$, $\Omega = 20$, $g = 9.81$, $l = 1$, $m = 1$ und die Anfangswerte $\varphi(0) = 0.1$, $\dot{\varphi}(0) = 0$. Erstelle ein Plot $\varphi(t)$.
- (d) Diskutiere die Erhaltung der Energie: Berechne die kinetische Energie $T(t)$, die potentielle Energie $V(t)$ und die Gesamtenergie $E(t) = T + V$. Was beobachtest du?
- (e) Berechne aus der numerischen Lösung die kartesischen Koordinaten $x(t), y(t)$ des Pendels und erstelle eine Animation der Bewegung.

2. [Punkte] Rotationssymmetrie und Erhaltung des Drehimpulses

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m , das sich in zwei Dimensionen unter dem Einfluss eines zentralen Potentials V bewegt, das nur vom Abstand zum Ursprung abhängt. Die Lagrange-Funktion in kartesischen Koordinaten lautet:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

- (a) Transformiere die Lagrange-Funktion in Polarkoordinaten (r, φ) . Zeige, dass die Lagrange-Funktion dann die Form

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$$

hat.

- (b) Betrachte nun die infinitesimale Transformation

$$r' = r, \quad \varphi' = \varphi + s,$$

wobei $s \ll 1$ eine infinitesimale Transformationsgröße ist. Zeige, dass L unter dieser Transformation invariant ist, und bestimme mithilfe des Noether-Theorems die zugehörige Erhaltungsgröße I .

Hinweis: Berechne

$$I = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \frac{\partial r'}{\partial s} \right|_{s=0} + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \frac{\partial \varphi'}{\partial s} \right|_{s=0}.$$

- (c) Wiederhole die Analyse in kartesischen Koordinaten unter der infinitesimalen Drehung

$$x' = x \cos s - y \sin s, \quad y' = x \sin s + y \cos s.$$

Zeige, dass sich dieselbe Erhaltungsgröße ergibt.

A2

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + V(\sqrt{x^2 + y^2})$$

$$(a) \quad \underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = r \underline{e}_r ; \quad r^2 = x^2 + y^2$$

$$\dot{\underline{r}} = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi$$

$$|\dot{\underline{r}}|^2 = \dot{\underline{r}} \cdot \dot{\underline{r}} = \dot{r}^2 + (r \dot{\varphi})^2$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r)$$

$$(b) \quad r'(t) = r(t), \quad \varphi'(t) = \varphi(t) + S, \quad S \ll 1.$$

$$\text{i.A.: } L = L(q, \dot{q}, t) ; L' = L'(q', \dot{q}', t)$$

$$\delta L = L' - L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i$$

$$\text{wenn } \delta L = \frac{dF}{dt}, \quad \text{dann}$$

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L' = \int_{t_1}^{t_2} L + \delta L = S + \underbrace{F(t_2) - F(t_1)}_{= \text{const.}}$$

$\Rightarrow$ Euler-Lagrange Gl. bleiben unverändert.

Betrachte

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right]$$

$$E-L: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \uparrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] = \delta L$$

Damit schreiben wir

$$\delta L = \frac{d}{dt} F \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i - F \right)}_Q = 0$$

Also $\dot{Q} = 0$ und Q ist eine Erhaltungsgröße.

$$\text{Hier: } q = (r, \varphi) \rightarrow q' = (r', \varphi') = (r, \varphi + \epsilon) \quad \delta \varphi$$

$$\begin{aligned} \delta L &= \cancel{\frac{\partial L}{\partial r} \delta r} + \frac{\partial L}{\partial \varphi} \delta \varphi + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \delta \dot{r}} + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \delta \dot{\varphi}} \\ &= \frac{\partial L}{\partial \varphi} \delta \varphi = 0 + \mathcal{O}(\delta \varphi) \xrightarrow{\delta \varphi \ll 1} 0 \end{aligned}$$

D.h. L ist invariant unter infinitesimalen

Rotationen.

$$Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \delta r + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \delta \varphi$$

$$= \underbrace{m r^2 \dot{\varphi}}_{\text{Drehimpuls}} \delta \varphi$$

$$\text{Drehimpuls } |\mathbf{L} \times \mathbf{p}| = m |\mathbf{L} \times \dot{\mathbf{r}}|$$