Abgabe bis Dienstag, den 20.05.2025, 14 Uhr über die Moodle-Plattform.

9. [*12 Punkte*] **Doppelpendel am Computer**

Das Doppelpendel ist eines der einfachsten dynamischen Systeme welches chaotisches (langfristig nicht vorhersagbares) Verhalten zeigt. Der Aufbau ist wie folgt: An die Masse m_1 eines Pendels mit der Länge l_1 wird ein weiteres Pendel der Länge l_2 mit Masse m_2 gehängt. Gewichtskraft wirkt in negativer y-Richtung. Auf dem Übungsblatt 3 haben wir das System in Kleinwinkelnäherung untersucht. Im Folgenden werden wir das Doppelpendel in seiner Gesamtheit untersuchen und dazu die Bewegungsgleichungen numerisch lösen. Sei jeweils φ_1 und φ_2 die Auslenkung der Verbindungsstange 1 und 2 vom Lot, dann lautet die Position der Masse m_1 und m_2:

$$x_1 = l_1 \sin\varphi_1, \quad y_1 = -l_1 \cos\varphi_1$$

und

$$x_2 = x_1 + l_2 \sin\varphi_2, \quad y_2 = y_1 - l_2 \cos\varphi_2 \,.$$

Der Einfachheit halber setzen wir im Folgenden $m_1 = m_2 = m$ und $l_1 = l_2 = l$.
Hinweis: Ergänzend zu dieser Aufgabe gibt es auf der Moodle-Plattform ein Python-Programm namens `double_pendulum_exercise_0.ipynb`. Den Code müsst du an den mit `XXX` gekennzeichneten Stellen ergänzen.

3 (a) Berechne die kinetische $T = T_1 + T_2$ und die potentielle Energie $V = V_1 + V_2$ des gesamten Systems.

3 (b) Stelle die Bewegungsgleichungen für die beiden generalisierten Koordinaten φ_1 und φ_2 mit Hilfe Euler-Lagrange-Gleichung auf.
Hinweis: Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 &= -\frac{1}{2}\left[\ddot{\varphi}_2 \cos(\Delta\varphi) + \dot{\varphi}_2^2 \sin(\Delta\varphi)\right] - \frac{g}{l}\sin(\varphi_1) \\ \ddot{\varphi}_2 &= -\left[\ddot{\varphi}_1 \cos(\Delta\varphi) - \dot{\varphi}_1^2 \sin(\Delta\varphi)\right] - \frac{g}{l}\sin(\varphi_2)\,, \end{aligned}$$

hierbei ist $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.

1 (c) Wir sehen, dass beide Bewegungsgleichungen $\ddot{\varphi}_1$ und $\ddot{\varphi}_2$ enthalten, d. h. wir haben ein System gekoppelter Differentialgleichungen. Um die Gleichungen numerisch zu lösen, müssen wir sie in eine spezielle Form bringen:

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{\varphi}_1 + a_{12}\ddot{\varphi}_2 &= f_1(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) \\ a_{21}\ddot{\varphi}_1 + a_{22}\ddot{\varphi}_2 &= f_2(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2)\,. \end{aligned}$$

Bestimme sowohl die Koeffizienten der Matrix $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{smallmatrix}\right)$ als auch die Einträge des Vektors $\left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ f_2 \end{smallmatrix}\right)$.

1 (d) Implementiere nun in der Funktion `eq_of_motion(t, y)` die Berechnung der Matrix und des Funktionenvektors.

1 (e) Wir erhalten so ein lineares System für $\ddot{\varphi}_1$ und $\ddot{\varphi}_2$ und lösen es bei jedem Zeitschritt durch Matrixinversion:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Dieser Schritt entspricht dem Lösen des Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nach dem Vektor $\mathbf{x}$. Benutze die Funktion `np.linalg.solve`, um den Vektor $\mathbf{x}$ zu berechnen, der gerade den gesuchten zweiten Ableitungen $\ddot{\varphi}_1$ und $\ddot{\varphi}_2$ entspricht.

1 (f) Erzeuge Animationen `double_pendulum.gif` für unterschiedliche Anfangsbedingungen. Wähle zum Beispiel: $\varphi_1(0) = \pi/2$, $\varphi_2(0) = \pi + 0.1$, $\dot{\varphi}_1(0) = 0$ und $\dot{\varphi}_2(0) = 0$.

2 (g) Berechne aus den numerischen Ergebnissen die kinetische $T(t)$, die potentielle $V(t)$ und die Gesamtenergie $E(t) = T(t) + V(t)$. Welches Verhalten von $E(t)$ erwartest du basierend auf dem Noether-Theorem?

Info: Adam Wysocki, E2 6, Zi. 4.26, a.wysocki@lusi.uni-sb.de oder via Moodle
Marc Thome, E2 6, Zi. 4.23, thome.marc@lusi.uni-sb.de oder via Moodle
Joshua Weißenfels, s9joweis@uni-saarland.de oder via Moodle
Nic Collingro, nico00001@uni-saarland.de oder via Moodle

10. [*8 Punkte*] **Symmetrie des Potentials $V = \alpha/x^2$**

Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einem eindimensionalen Potential der Form

$$V(x) = \frac{\alpha}{x^2}\,.$$

$\boxed{2}$ (a) Zeige, daß die Lagrange-Funktion invariant unter der einparametrigen Transformation

$$x' = \lambda x\,, \quad t' = \lambda^2 t$$

ist.
Hinweis: Zeige, dass

$$L'\left(x', \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}\right)\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = L\left(x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$$

gilt.

$\boxed{3}$ (b) Führe die infinitesimale Transformation durch und leite die zugehörige Noether-Erhaltungsgröße her.
Hinweis: Für eine infinitisimale Transformation ist $\lambda = 1 + s$ mit $s \ll 1$, so daß Terme der Ordnung s^2 vernachnässigt werden können. Die Noether-Erhaltungsgröße bei gleichzeitiger Transformation des Orts und Zeit lautet

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{\partial x'}{\partial s}\bigg|_{s=0} + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)\frac{\partial t'}{\partial s}\bigg|_{s=0}\,.$$

$\boxed{3}$ (c) Nutze die Energieerhaltung $E = T + V$ und die Erhaltungsgröße aus (b), um das Problem vollständig zu lösen. Sie erhalten eine Differentialgleichung für $x^2(t)$, welche sich direkt integrieren lässt. Interpretiere die Lösung.
Hinweis: Benutze $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x^2 = 2x\dot{x}$.

Info: Adam Wysocki, E2 6, Zi. 4.26, `a.wysocki@lusi.uni-sb.de` oder via Moodle
Marc Thome, E2 6, Zi. 4.23, `thome.marc@lusi.uni-sb.de` oder via Moodle
Joshua Weißenfels, `s9joweis@uni-saarland.de` oder via Moodle
Nic Collingro, `nico00001@uni-saarland.de` oder via Moodle