6. Übungsblatt

Theoretische Physik
Universität des Saarlandes
Dr. habil. Philipp Hövel

Abgabe bis Dienstag, den 27.05.2025, 14 Uhr über die Moodle-Plattform.

11. [*10 Punkte*] **Periheldrehung**

Wir betrachten einen Planeten der Masse m der sich im zentralsymmetrischen Potenzial $V(r)$ eines Zentralgestirns bewege.

4 (a) Der Punkt einer Umlaufbahn, an dem sich Gestirn und Planet am nächsten kommen wird als *Perihel* bezeichnet. Der entfernteste Punkt hingegen als *Aphel*. Zeige, dass sich die Winkeländerung $\Delta\varphi$ eines Radienzyklus, also vom Perihel zum Aphel und zurück, sich als

$$\Delta\varphi = -2\frac{d}{d\ell}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr\,\sqrt{2m\left[E - V(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2}\right]} \tag{1}$$

ausdrücken lässt. Dabei beschreibe $r_{\min}$ den Perihelabstand und entsprechend $r_{\max}$ den Abstand zum Aphel.
Hinweis: *Bei der Ausführung der Ableitung ist die Leibnizregel für Integrale zu beachten, da $r_{\min} \equiv r_{\min}(\ell)$ bzw. $r_{\max} \equiv r_{\max}(\ell)$. Begründe über die Energieerhaltung, warum die zwei dort auftretenden Randterme verschwinden müssen.*

Der Ausdruck $\Delta\varphi$ erlaubt eine Aussage darüber, ob eine Bahnkurve offen oder geschlossen ist. Letzteres tritt gerade dann ein, wenn

$$\Delta\varphi = \frac{m}{n}\,2\pi\,, \quad \text{mit } m,\, n \text{ ganze Zahlen}$$

gilt. In diesem Fall führt das System m ganze Umläufe in n Zyklen aus, wonach das System sich wieder in seiner Ausgangsposition befindet und die Bahnkurve folglich schließt.
Aus der Vorlesung wissen wir, dass das Kepler-Potenzial $V_0(r) = -k/r$ zu elliptischen Bahnen führt, wir erwarten daher gerade $\Delta\varphi = 2\pi$. Es soll nun diesem Potenzial eine kleine, ebenfalls radialsymmetrische Störung $V_1(r)$ hinzugefügt werden, sodass wir insgesamt das Potenzial

$$V(r) = V_0(r) + V_1(r)\,, \quad \text{mit} \quad V_1 \ll V_0$$

betrachten. In erster Näherung können wir dann immer noch elliptische Bahnen annehmen. Allerdings erwarten wir für einen Radienzyklus nun $\Delta\varphi = 2\pi + \delta\varphi$, wodurch sich die Halbachsen der Ellipse um $\delta\varphi$ um das Zentralgestirn verdreht haben. Dieses als *Periheldrehung* bekannte Phänomen soll nun weiter untersucht werden.

4 (b) Leite einen Ausdruck für $\Delta\varphi$ her. Entwickle dazu den Wurzel-Term in (1) um $V_1(r)$, benutze dabei $\sqrt{a-x} \approx \sqrt{a} - \frac{x}{2\sqrt{a}}$ für $x \ll a$.
Hinweis: *Dein Ergebnis sollte*

$$\delta\varphi = 2\frac{d}{d\ell}\int_0^{\pi} d\varphi\,\frac{m}{\ell}r^2(\varphi)V_1(\varphi)$$

lauten. Bei der Ersetzung der Integration über den Radius r zum Polarwinkel φ dient der aus der Vorlesung bekannte Zusammenhang $\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot r}{\dot\varphi}$.

2 (c) Berechne die Winkeldifferenz $\delta\varphi$ für die beiden Störungen

$$V_1(r) = \frac{\beta}{r^2} \quad \text{und} \quad V_1(r) = \frac{\gamma}{r^3}\,.$$

Für die Bahn $r(\varphi)$ kannst du die *ungestörte* Bahngleichung

$$r(\varphi) = \frac{p}{1+\varepsilon\cos(\varphi)}\,, \quad \text{mit} \quad p = \frac{\ell^2}{mk}\,, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}}$$

verwenden.

12. [*10 Punkte*] **Lenzscher Vektor - Eine weitere Erhaltungsgröße**

In der Vorlesung haben wir die Freiheitsgerade des Zwei-Körper-Problems von 12 auf 2 reduziert, indem wir die *Erhaltungsgrößen* des Systems gefunden haben: Die Konstanz des Gesamtimpulses (3), die geradlinig, gleichförmige Bewegung des Schwerpunkts (3), die Erhaltung des Drehimpulses (3), sowie die Energieerhaltung (1). Für das Kepler-Potenzial lässt sich noch eine weitere Konstante der Bewegung finden, der *Lenzsche Vektor* (oder auch *Laplace–Runge-Lenz Vektor*), definiert durch

$$\mathbf{\Lambda} = \frac{\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell}}{mk} - \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times m\dot{\boldsymbol{r}}.$$

3,5 (a) Zeige durch Berechnung der totalen zeitlichen Ableitung, dass es sich bei $\mathbf{\Lambda}$ wirklich um eine Erhaltungsgröße handelt.
Hinweis: *Es gilt* $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$. *Zeige zudem, dass* $\boldsymbol{r} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = r\dot{r}$.

2 (b) Berechne den Betrag $|\mathbf{\Lambda}|$ und weise nach, dass er der Exzentrizität $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}}$ entspricht.

2,5 (c) Zeige, dass der Lenzsche Vektor entlang des Vektors zum Perihel zeigen muss, also $\mathbf{\Lambda} \parallel \boldsymbol{r}_{\text{min}}$, $\boldsymbol{r}_m athrmmin$ bezeichne dabei den Perihelvektor.
Hinweis: *Begründe zunächst, warum wir den Lenzschen Vektor einfach an* $\boldsymbol{r}_{\text{min}}$ *berechnen können und trotzdem eine allgemeine Aussage treffen können. Wie stehen* $\boldsymbol{r}_{\text{min}}$ *und der entsprechende Impulsvektor zueinander?*

2 (d) Der Lenzsche Vektor erlaubt eine *integrationsfreie* Herleitung der Bahnkurve

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\varphi)}, \quad \text{mit} \quad p = \frac{\ell^2}{mk}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}}.$$

Berechne dazu das Skalarprodukt $\mathbf{\Lambda} \cdot \boldsymbol{r}$ und leite obige Formel her.
Hinweis: *Definiere* φ *als* $\sphericalangle(\mathbf{\Lambda}, \boldsymbol{r})$.

Anmerkung: Auch wenn es sich bei $\mathbf{\Lambda}$ um einen Vektor handelt, legt er nur eine einzelne Erhaltungsgröße fest, nämlich die Konstanz der Perihelrichtung. Dies liegt daran, dass $\mathbf{\Lambda}$ bereits in der Bahnebene liegt und der Betrag durch die Exzentrizität eine Funktion der beiden Erhaltungsgrößen E und ℓ ist.

Info: Adam Wysocki, E2 6, Zi. 4.26, `a.wysocki@lusi.uni-sb.de` oder via Moodle
Marc Thome, E2 6, Zi. 4.23, `thome.marc@lusi.uni-sb.de` oder via Moodle
Joshua Weißenfels, `s9joweis@uni-saarland.de` oder via Moodle
Nic Collingro, `nico00001@uni-saarland.de` oder via Moodle