1. [*Computer*] **Störung des Kepler-Potenzials**

Wir betrachten das System Erde-Sonne mittels des Relativvektors $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{\text{Erde}} - \boldsymbol{r}_{\text{Sonne}}$. Daher können wir die Sonne als im Koordinatenursprung liegend annehmen und $\boldsymbol{r}$ liefert uns die derzeitige Position der Erde auf ihrer Umlaufbahn. Die zu lösende Differenzialgleichung (in **kartesischen Koordinaten**) lautet dann

$$m\,\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{k}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\,, \quad k = GM_{\text{Sonne}}m_{\text{Erde}} = GMm \tag{1}$$

mit der totalen Masse $M = M_{\text{Sonne}} + m_{\text{Erde}}$, der reduzierten Masse $m = \frac{M_{\text{Sonne}}\,m_{\text{Erde}}}{M}$ und der Gravitationskonstante $G = 6{,}6743 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$. Wir wollen zunächst dieses Problem numerisch lösen.

(a) Vervollständige die Funktion `eq_of_motion`, die die Differenzialgleichungen definiert durch Gleichung (1) als System von Differenzialgleichungen erster Ordnung zurück gibt. Der Parameter `y_init` enthält dabei die Werte $[x,\, y,\, \dot{x},\, \dot{y}]$. Deine Rückgabe sollte $[\dot{x},\, \dot{y},\, \ddot{x},\, \ddot{y}]$ entsprechen.
Hinweis: *Zu Beginn des Notebooks wurden einige benötigte Größen wie die Erdmasse global definiert. Du kannst diese also einfach überall in deinen Funktionen benutzen.*

Der Wechsel zu Polarkoordinaten $(r,\, \varphi)$ hat uns in der Vorlesung erlaubt, die Differentialgleichungen (1) analytisch zu lösen, was auf die Ellipsen-Gleichung

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\varphi)}\,, \quad \text{mit} \quad p = \frac{\ell^2}{m\,k}\,, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{m\,k}}\,. \tag{2}$$

geführt hat. Dabei bezeichnet p den *Parameter*, ε die *Exzentrizität* und E die Energie. Wir wollen dieses Ergebnis benutzen um unsere numerische Lösung zu verifizieren.

(b) Implementiere den Funktionenkörper der Funktion `radius_elliptic_orbit`, die eine Bahn-Position `r0`, die zugehörige Geschwindigkeit `v0` und ein Array an Winkeln `phi` akzeptiert und als Lösung den Radius $r(\varphi)$ der Gleichung (2) zurückgibt. Beachte dabei:

- Der Drehimpuls ist definiert als $\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$. Da wir wissen, dass der Drehimpuls erhalten ist, können wir also seinen Betrag einfach mittels `r0` und `v0` ausrechnen.
- Da sich das Problem in einer Ebene abspielt, ist $|\boldsymbol{\ell}| = \ell_z$, also gerade die z-Komponente des Kreuzprodukts. Diese lässt sich aus den 2-dimensionalen Arrays `r0` und `v0` berechnen.
- Da der Input durch kartesische Koordinaten gegeben ist, berechnet sich die (konstante) Energie zu $E = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + V(\sqrt{x^2 + y^2})$.

Wir wollen nun untersuchen, was passiert, wenn wir zum Kepler-Potenzial eine kleine, radialsymmetrische Störung der Form

$$V_1(r) = \frac{\gamma}{r^2}$$

hinzufügen.

(c) Übernimm deine Lösung aus Teil a) in die Funktion `eom_perturbed` und modifiziere deine Rückgabe so, dass nun das Gesamtpotenzial $V(r) = -\frac{k}{r} + V_1(r)$ ausgewertet wird.
Hinweis: *Eine passende Wahl für den Parameter γ ist bereits zu Beginn der Funktion definiert.*

Anmerkung: Als Startposition wurde dar Perihel der Erdumlaufbahn gewählt, also der Punkt der Bahn, der am nächsten zur Sonne liegt. Allerdings wurde die Perihel-Geschwindigkeit auf die Hälfte des tatsächlichen Wertes gesetzt, da die Bahn unserer simulierten Erde dann besser erkennbar als Ellipse erscheint. Zudem werden zur Darstellung alle Positionen mit der *astronomischen Einheit* $AU = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m skaliert, damit die Koordinaten von der Größenordnung 1 sind.

Info: Adam Wysocki, E2 6, Zi. 4.26, a.wysocki@lusi.uni-sb.de
Marc Thome, E2 6, Zi. 4.23, thome.marc@lusi.uni-sb.de
Joshua Weißenfels, s9joweis@uni-saarland.de
Nic Collingro, nico00001@uni-saarland.de

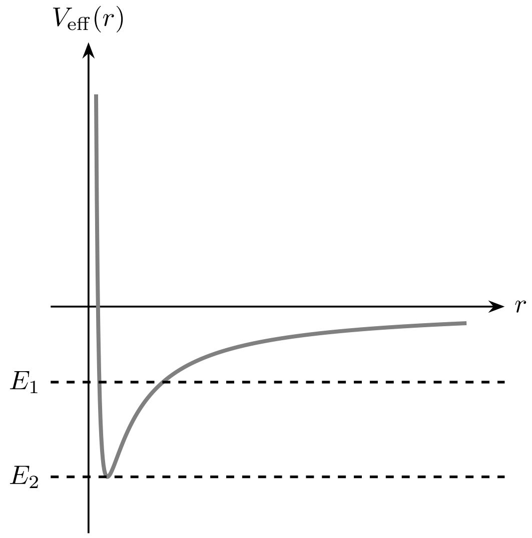

Abbildung 1: Graph von $V_{\text{eff}}(r)$ für das Kepler-Potenzial.

2. [*Präsenz*] **Kreisförmige Orbits**
Obige Abbildung zeigt das effektive Potenzial

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2} \,,$$

wobei hier $V(r)$ als Kepler-Potenzial $V(r) = -k/r$ gewählt wurde. Zudem wurden zwei Energieniveaus E_1 und E_2 gekennzeichnet.

(a) Betrachte die Schnittstellen des Energieniveaus E_1 mit der Kurve des effektiven Potenzials. Welche besonderen Punkte des Orbits liegen an diesen Stellen. Was gilt insbesondere für die zeitliche Änderung des Radius $\dot{r}$ an diesen Stellen?

(b) Betrachte nun das Energieniveau E_2. An welcher besonderen Stelle des effektiven Potenzial liegt es? Was gilt hier für den Radius einer Bahn bzw. seine Änderungsrate $\dot{r}$? Was bedeutet dies für die Form des Orbits?

(c) Leite mit deinen Erkenntnissen nun eine Bedingung für die Existenz stabiler Kreisbahnen her. Finde einen Ausdruck in Abhängigkeit der Ableitungen des Potenzials $V(r)$.

(d) Sei $V(r) = -k/r^n$. Nutze deine hergeleitete Stabilitätsbedingung, um herauszufinden, für welche n stabile Kreisbahnen auftreten können.

Info: Adam Wysocki, E2 6, Zi. 4.26, `a.wysocki@lusi.uni-sb.de`
Marc Thome, E2 6, Zi. 4.23, `thome.marc@lusi.uni-sb.de`
Joshua Weißenfels, `s9joweis@uni-saarland.de`
Nic Collingro, `nico00001@uni-saarland.de`