Kapitel 4

Symplektische Räume und Hamiltonsche Systeme

4.1 Symplektische Räume

Definition 4.1.1 *Eine stetige Bilinearform $B : V \times V \to \mathbb{R}$ auf einem reellen Banachraum V heißt* nichtdegeneriert*, wenn gilt $B(x, y) = 0$ für alle $x \in V$, so folgt $y = 0$.*

Definition 4.1.2 *Ein Paar (V, χ), wobei V ein reeller Banachraum und χ eine antisymmetrische, nichtdegenerierte Bilinearform ist, heißt* symplektischer Raum*, χ nennt man* symplektische Form*.*

Zu V sei V^* der duale Raum, d.h. der Raum aller stetigen Linearformen $V \to \mathbb{R}$. Ist eine Bilinearform nichtdegeneriert, so existiert eine lineare Abbildung

$$B^* : V \to V^* : x \mapsto \ell_x$$

mit $\ell_x(y) = B(x, y)$.

Sei K die Einheitskugel in V, d.h. $K = \{v \in V \mid \|v\| = 1\}$.

Lemma 4.1.3 *B^* ist stetig und injektiv.*

Beweis. Offensichtlich ist $B(x, \cdot) : V \to \mathbb{R}$ ein stetiges lineares Funktional. Sei $\|x\| = 1$, dann ist

$$\|\ell_x\| = \sup_{y \in K} \|\ell_x(y)\| = \sup_{y \in K} \|B(x, y)\| \leq C\|x\|\|y\| \leq C\|y\|.$$

Damit ist $\|B^*\| \leq C$ und der Operator stetig. Für die Injektivität benötigen wir die Nichtdegeneriertheit von B. Ist $B(x, \cdot) = \ell_x = 0$, so ist $B(x, y) = 0$ für alle $y \in V$, im Widerspruch zur Annahme der Nichtdegeneriertheit. $\square$

Definition 4.1.4 *Die Bilinearform B ist* stark nichtdegeneriert*, falls B ein Isomorphismus ist.*

Bemerkung 4.1.5 In endlich dimensionalen Banachräumen folgt aus der Nichtdegeneriertheit von B die starke Nichtdegeneriertheit von B. In unendlich dimensionalen Räumen ist dazu notwendig, dass V isomorph zu V^* ist. Dies ist jedoch keineswegs hinreichend.

Definition 4.1.6 *Ist χ symplektisch und stark nichtdegeneriert, so nennen wir χ* stark symplektisch *und entsprechend (V, χ) einen* stark symplektischen Raum*.*

Aufgabe 4.1.7 Es sei (V, χ) ein endlich dimensionaler symplektischer Raum, und $W \subset V$ ein Unterraum. $(W, \chi_{|V_1})$ sei ein symplektischer Raum. Setze

$$W^\chi = \{v \in V \mid \chi(w, v) = 0,\ \forall w \in W\}\,.$$

Man zeige W^χ ist symplektisch und $V = W \oplus V^\chi$ und $W^{\chi\chi} = W$.

Aufgabe 4.1.8 Man zeige, dass die Aussage $V = W \oplus W^\chi$ ohne die Voraussetzung (W, χ) symplektisch falsch ist.

Beispiel 4.1.9 Das Standardbeispiel für einen symplektischen Raum ist der Raum $(\mathbb{R}^{2n}, \omega^0)$, wobei

$$\omega^0(x, y) = \langle Jx, y\rangle$$

mit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Offenkundig ist

$$J^T = J^{-1} = -J.$$

Insbesondere ist $J^2 = -J$. Man sieht leicht, dass die Form ω^0 schiefsymmetrisch und nicht degeneriert ist. Es gilt

$$\omega^0(x, Jy) = \langle Jx, Jy\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Mittels J definiert man eine komplexe Struktur auf $\mathbb{R}^{2n}$, denn $\mathbb{R}^{2n}$ wird mit $v = (x, y)$ und $z \in \mathbb{C}, z = \alpha + \mathrm{i}\beta$ durch die Definition

$$zv = (\alpha + \mathrm{i}\beta)v = \alpha v + \beta Jv$$

zum komplexen Raum.

Lemma 4.1.10 *Ein endlich dimensionaler symplektischer Raum (V, χ) ist von gerader Dimension, es gibt eine Basis $[(v_1, \dots v_n, w_1, \dots, w_n)$ von V mit*

$$\begin{aligned} \chi(v_i, v_j) &= 0 \\ \chi(w_i, w_j) &= 0 \\ \chi(v_i, w_j) &= \begin{cases} 1 & \textit{falls } i = j \\ 0 & \textit{falls } i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

Beweis. Wir wählen einen Vektor v_1. Da die Form χ nicht degeneriert ist, gibt es ein $w \in V$ mit $\chi(v, w) \neq 0$. Durch Multiplikation erhält man $w_1 = \alpha w$ mit

$$\chi(v_1, w_1) = 1.$$

Nun ist der Raum $V_1 = [v_1, w_1]$ symplektisch und daher ist nach Aufgabe 4.1.7 der Raum $V = V_2 \oplus V_2$ mit symplektischen V_2. Durch Induktion ist damit das Lemma bewiesen. □

Damit sieht man auch, dass der Raum V in eine direkte Summe zwei dimensionaler symplektischer Räume zerlegt werden kann,

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$$

mit $V_i = [v_i, w_i]$.

Definition 4.1.11 *Eine lineare Abbildung $A : V \to V$ heißt* symplektisch *oder kanonisch, falls gilt*

$$\chi(Ax, Ay) = \chi(x, y).$$

In diesem Zusammenhang führen wir eine symplektische Form und eine lineare Abbildung folgende Bezeichnung ein:

$$A^* \chi(x, y) = \chi(Ax, Ay).$$

Im Standardraum $(\mathbb{R}^{2n}, \omega^0)$ ist eine Abbildung genau dann symplektisch, wenn gilt

$$\omega^0(x, y) = \langle Jx, y \rangle = \langle JAx, Ay \rangle = \omega^0(Ax, Ay).$$

Dies ist genau dann der Fall wenn

$$A^T J A = J.$$

Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar

$$|\det(A)| = 1.$$

Es gilt sogar

Lemma 4.1.12 $\det(A) = 1$.

Beweis. Zur Erinnerung ω^0 ist eine Bilinearform. Das äußere Produkt zweier schiefsymmetrischer Formen wird folgendermaßen definiert: sind ω^1, ω^2 schiefsymmetrische k bzw. l Formen, so ist

$$\omega^1 \wedge \omega^2(x^1, \dots x^{k+l}) = \sum_{\nu \in S(k+l)} (-1)^{\mathrm{sgn}(\nu)} \omega^1(x^{\nu(1)}, \dots, x^{\nu(k)}) \omega^2(x^{\nu(k+1)}, \dots, x^{\nu(k+l)}).$$

Hier steht $\mathrm{sgn}(\nu)$ für das Vorzeichen der Permutation ν. Die äußere Multiplikation ist assoziativ und distributiv. Außerdem ist bekannt, dass die Determinante bis auf Multiplikation mit Skalaren die einzige schiefsymmetrische n-Linearform auf $\mathbb{R}^n$ ist. Sei x_*^i die Linearform mit $x_*^i(x^j) = \delta_{ij}$. In dieser Sprache wird

$$\omega^0(x, y) = \sum_{i=1}^n x_*^{n+i} \wedge x_*^i(x, y).$$

Da ω^0 invariant unter A ist, gilt dies auch für jede äußere Potenz von ω^0. Insbesondere ist das $n-$fache Produkt

$$(\omega^0)^n = \omega^0 \wedge \dots \wedge \omega^0$$

schiefsymmetrisch und $2n$-linear. Also ist $(\omega^0)^n$ ein Vielfaches der Determinante. Nach Definition der Determinante gilt damit

$$(\omega^0)^n = A^*(\omega^0)^n = (\det A)(\omega^0)^n.$$

Daraus folgt aber $\det A = 1$, falls $(\omega^0)^n$ nicht die Nullform ist. Um einzusehen, dass dies nicht der Fall ist, überlegen wir uns, dass bei Einsetzen der Basis $\{v_j, w_j\}_{j=1,\dots,n}$ immer n-Faktoren der Form $\omega^0(v_j, w_k)$, bzw. $\omega^0(v_j, v_i)$ oder $\omega^0(w_j, w_k$ auftreten. Diese Produkte sind Null, außer in jedem Faktor hat man hat man einen Term der Form $\omega^0(v_j, w_j)$ oder $\omega^0(w_j, v_j)$ stehen. Wir nehmen an, die Basis sei so orientiert, dass bei

$$\omega^0(v_1, w_1)\omega^0(v_2, w_2) \cdots \omega^0(v_n, w_n)$$

der Faktor 1 steht. Dann betrachten wir alle Permutationen bezüglich der hier angegebenen Anordnung

$$v_1, w_1, v_2, w_2, \dots, v_n, w_n.$$

Vertauschen wir die Paare (v_j, w_j) und (v_k, w_k) so erhalten wir zwei Transpositionen und die Permutation ist gerade, der entstehende Vorfaktor $+1$. Gleiches gilt, wenn wir innerhalb von einer geraden Zahl solcher Paare v und w vertauschen. Die Permutation ist Gerade, der Wert des Produktes ist unverändert. Vertauschen wir in einer ungeraden Anzahl dieser Paare v und w so ergibt sich als Vorfaktor -1, denn Permutation ist ungerade, jeder dieser Faktoren vertauscht das Vorzeichen, also erhalten wir eine ungerade Anzahl von Faktoren -1 und insgesamt erhalten wir den gleichen Wert das oben angegebene Produkt. Also ist die Form $(\omega^0)^n$ nicht die Nullform. □

Lemma 4.1.13 *Ist* (V, χ) *ein symplektischer Raum,* $A : V \to V$ *symplektisch, so ist* A *injektiv. Ist* $\dim V < \infty$*, so ist wegen Lemma 4.1.12* A *auch surjektiv und die Menge der symplektischen Abbildungen bildet eine Gruppe. Mit* A *ist auch* A^T *symplektisch,* J *ist symplektisch.*

Beweis. Die Injektivität von A folgt sofort, denn $Ax = 0$ impliziert

$$\chi(x, y) = A^*\chi(x, y) = \chi(Ax, Ay) = 0$$

für alle $y \in V$. Wegen der Symplektizität folgt dann $x = 0$.

Offensichtlich ist die Hintereinanderausführung symplektischer linearer Abbildung symplektisch. Ebenso ist klar, dass mit A auch A^{-1} und A^T symplektisch sind, denn einerseits folgt aus der Symplektizität von A

$$\langle JAA^{-1}x, AA^{-1}Ay\rangle = \langle JA^{-1}x, A^{-1}y\rangle$$

und andererseits ist

$$\langle JAA^{-1}x, AA^{-1}Ay\rangle = \langle Jx, y\rangle.$$

Damit gilt also

$$(A^{-1})^T JA^{-1} = J.$$

Bilden der Inversen auf beiden Seiten ergibt

$$-J = J^{-1} = AJ^{-1}A^T$$

und damit

$$(A^T)^T(-J)A^T = -J, \text{ oder } (A^T)^T JA^T = J.$$

Offenkundig ist

$$\langle JJx, Jy\rangle = \langle -x, Jy\rangle = \langle -J^T x, y\rangle = \langle Jx, y\rangle.$$

Daher ist J symplektisch. □

Bemerkung 4.1.14 *Betrachten wir* $W = \ell^2$, $V = W \oplus W$ *und* $J : V \to V$ *durch* $J(w_1, w_2) = (w_2, -w_1)$ *und*

$$\chi(x, y) = \langle x, Jy\rangle_{W\oplus W}.$$

Dann ist $A(w_1, w_2) = sh_n(w_1), sh_n(w_2)$ *mit*

$$sh_n(w_1, w_2, w_3, \dots) = (0, \dots, 0, w_1, w_2)$$

symplektisch, jedoch nicht surjektiv.

Definition 4.1.15 *Die Gruppe der symplektischen Matrizen wird als* symplektische Gruppe *bezeichnet. Wir schreiben dafür* $\mathbf{Sp}(n)$.

Beispiel 4.1.16 1. Sei W ein reeller Vektorraum, W^* der Dualraum. Sei

$$V = W \times W^*.$$

Dann ist mit $v = (w, w^*)$

$$\omega^0(v_1, v_2) = \omega^0((w_1, w_1^*), (w_2, w_2^*)) = w_2^*(w_1) - w_1^*(w_2)$$

in natürlicher Weise eine nichtdegenerierte Form definiert.

2. Im Spezialfall eines Raumes mit innerem Produkt wird die obige Formel zu

$$\langle v_1, w_2 \rangle - \langle v_2, w_1 \rangle. \tag{4.1.17}$$

Dies entspricht der ursprünglichen Definition von ω^0.

3. Es sei $D \subset \mathbb{R}^m$ ein Gebiet, $W = C_c^\infty(D)$ die Menge der glatten Funktionen von $D \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger und $M(D)$ die Menge der glatten, absolut stetigen Maße (bezüglich dem Lebesgue-Maß) mit kompaktem Träger auf D. Dann ist die Abbildung

$$W \times M(D) \to \mathbb{R} \,:\, (f, \nu) \mapsto \int_\Omega f \mathrm{d}\nu$$

eine bilineare Abbildung. Da Elemente in $M(D)$ als

$$\nu = g\, dx, g \in W$$

dargestellt werden können, kann man auf $V = W \times M(D)$ folgende nichtdegenerierte Bilinearform bilden

$$\chi((f_1, \nu_1), (f_2, \nu_2)) = \int f_1 \,\mathrm{d}\nu_2 - \int f_2 \,\mathrm{d}\nu_1.$$

Damit ist χ eine symplektische Form. Ist χ stark symplektisch?

4. Symplektische Formen auf komplexen Räumen. Es sei $\langle ., . \rangle$ ein unitäres Produkt auf $\mathbb{C}^n$. $\mathbb{C}^n$ kann identifiziert werden mit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Damit lassen sich Formen auf $\mathbb{C}^n$ als Formen auf $\mathbb{R}^{2n}$ interpretieren und damit macht der Begriff der komplexen symplektischen Form Sinn. Damit läßt sich das unitäre Produkt in Realteil und Imaginärteil aufspalten. Der Realteil ist ein reelles Skalarprodukt, der Imaginärteil eine symplektische Form.

5. In diesem Abschnitt sei H ein komplexer Hilbertraum, wir definieren nun eine symplektische Form wie sie in quantenmechanischen Anwendungen auftritt. Hier sei $\langle ., . \rangle$ ein hermitesches inneres Produkt, $\hbar$ die Plancksche Konstante[1]. Sei

$$\chi : H \times H \to \mathbb{R} : (\psi_1, \psi_2) \mapsto -2\hbar \mathrm{Im}\langle \psi_1, \psi_2 \rangle.$$

[1]Max Planck (23.4.1858-4.10.1947), deutscher Physiker und Nobelpreisträger (1918), Mitbegründer der Quantenmechanik, arbeitete auch in der statistischen Mechanik.

χ ist eine stark symplektische Form. Wie sieht die Form als Form auf der Komplexifizierung eines reellen Hilbertraumes aus?

Man kann nun entsprechend der obigen Definition einer kanonischen Abbildung auch symplektische oder kanonische Abbildungen zwischen verschiedenen Räumen definieren.

Definition 4.1.18 *Seien (V_1, χ^1) und (V_2, χ^2) symplektische Räume. Eine lineare Abbildung*

$$A : V_1 \to V_2$$

heißt symplektisch, *falls*

$$A^*\chi_2 = \chi_1.$$

Für ein symplektisches A gilt offenbar $\ker A = \{0\}$, also ist A injektiv und $\dim V_1 \leq \dim V_2$.

Definition 4.1.19 *Es sei (V, χ) ein symplektischer Raum. Eine glatte Abbildung $\Phi : V \to V$ heißt* symplektisch, *falls*

$$D\Phi^*\chi = \chi.$$

Allgemeiner nennt man eine glatte Abbildung $\Phi : V_1 \to V_2$ zwischen symplektischen Räumen (V_1, χ_1), (V_2, χ_2) symplektisch, falls gilt

$$D\Phi^*\chi_2 = \chi_1.$$

Definition 4.1.20 *Es sei V ein reeller Vektorraum. Mit $\Omega^n(V)$ bezeichnen wir die Menge aller stetigen, schiefsymmetrischen n–Linearformen auf V.*

Ist $\chi : \mathbb{R}^{2n} \to \Omega^2(\mathbb{R}^{2n}) : x \mapsto \chi_x \in \Omega^2(\mathbb{R}^{2n})$ eine glatte Abbildung, so wird der „pull-back“ unter einer glatten Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ durch

$$(\Phi^*\chi)_x(u, v) = \chi_{\Phi(x)}(D\Phi(x)u, D\Phi(x)v).$$

Damit kann man die eben angegebenen Bedingungen für die Symplektizität auch für Formen auf Mannigfaltigkeiten definieren, wir kommen darauf zurück.

Aufgrund obiger Charakterisierung symplektischer linearer Abbildung ist klar, dass für eine symplektische Abbildung gilt, dass sie volumenerhaltend ist.

4.2 Hamiltonsche Gleichungen

Hamiltonsche Gleichungen und symplektische Räume Es sei V ein reeller Vektorraum, die Menge aller (C^∞)-Vektorfelder auf V sei $\mathcal{X}_V$.

Definition 4.2.1 *Es sei (V, χ) ein symplektischer Raum. Ein (C^∞-)Vektorfeld*

$$X : V \to V$$

heißt hamiltonsch, *falls es eine (C^∞-)Funktion $H : V \to \mathbb{R}$ gibt, so dass*

$$\chi^*(X(v)) = DH(v) \qquad (in\ V^*) \tag{4.2.2}$$

für alle $v \in V$ ist. Ist $H : V \to \mathbb{R}$ gegeben und X ein Vektorfeld, welches der Gleichung 4.2.2 genügt, so schreiben wir auch $X = X_H$. Für die Menge der symplektischen (C^∞-)Vektorfelder auf dem Raum (V, χ) schreiben wir $\mathcal{X}_{(V,\chi)}$.

Lemma 4.2.3 *Ist (V, χ) ein stark symplektischer Raum und $H : V \to \mathbb{R}$ eine (C^∞-)Funktion, so gibt es ein (C^∞-)Vektorfeld X, so dass Gleichung 4.2.2 erfüllt ist.*

Beweis. $DH(v) \in V^*$ und $\chi^* : V \to V^*$ ist ein linearer Isomorphismus, daher gibt es ein $w \in V$ mit

$$\chi^*(w) = DH(v),$$

setze $X(v) = w$. Dann ist offensichtlich die Gleichung erfüllt und

$$X(v) = (\chi^*)^{-1} DH(v)$$

ist C^∞. □

Definition 4.2.4 *Es sei V ein linearer Raum und $\Omega^2(V)$ die Menge der schiefsymmetrischen bilinearen Formen, X ein Vektorfeld auf V. Wir führen die folgende Abbildung ein*

$$\mathbf{i}_X : \overset{2}{\Omega}(V) \times V \to V^* : (chi, x) \mapsto \chi^*(X(x)),$$

oder

$$\mathbf{i}_{X(x)}(v) = \chi(X(x), v),$$

für $x, v \in V$. Diese Abbildung bezeichnen wir als innere Multiplikation.

Man beachte, dass $\mathbf{i}_X$ eine Abbildung ist, die jedem Vektorfeld eine 1-Form zuordnet. Diese Sichtweise spielt bei der Übertragung auf Mannigfaltigkeiten eine Rolle.

Für unendlich dimensionale Räume treten einige technische Probleme auf, die wir im Moment zurückstellen wollen, z.B. gibt es die Frage der Definitionsbereiche.

Lemma 4.2.5 *Es seien (V_1, χ_1), (V_2, χ_2) stark symplektische Räume, $\Phi : V_1 \to V_2$ ein Diffeomorphismus. Dann ist Φ symplektisch genau dann, wenn für alle hamiltonschen Vektorfelder X_H auf V_2 gilt*

$$\Phi_* X_{H \circ \Phi} = X_H,$$

wobei Φ_* folgende Operation „push-forward" ist:

$$(\Phi_* X)(\Phi(z))) = D\Phi(z) X(z).$$

Beweis. Zunächst ist für eine Funktion $H : V_2 \to \mathbb{R}$ $X_{H\circ\Phi}$ ein Vektorfeld auf V_1. Damit ist für $v \in V_1$

$$\Phi_*(X_{H\circ\Phi})(\Phi(v)) = D\Phi(v)X_{H\circ\Phi}(v).$$

Für $w, v \in V$ erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} \chi_1(X_{H\circ\Phi}(w), v) &= D(H\circ\Phi)(w)(v) \\ &= DH(\Phi(w)D\Phi(w)v \\ &= \chi_2(X_H(\Phi(w)), D\Phi(w)v). \end{aligned}$$

Wir kommen zum eigentlichen Beweis. Zunächst sei Φ symplektisch. Dann ist

$$\Phi^*\chi_2 = \chi_1,$$

oder

$$\chi_2(D\Phi(w)(X_{H\circ\Phi})(w), D\Phi(w)(v)) = \chi_1(X_{H\circ\Phi}(w), v).$$

Da $v \in V_1$ beliebig, durchläuft auch $D\Phi(w)(v)$ V_2 und daher folgt aus der Nichtdegeneriertheit von χ_2 und e4er Vorbemerkung, dass $X_H(\Phi(w)) = D\Phi(w)(X_{H\circ\Phi})(w)$ gilt. Damit ist die erste Richtung gezeigt.

Wir kommen zur Gegenrichtung: wir haben für jedes hamiltonsche Vektorfeld X_H in V_2 die Beziehung

$$D\Phi(w)X_{H\circ\Phi}(w) = X_H(\Phi(w)).$$

Mit der Vorbemerkung erhalten wir

$$\begin{aligned} \chi_1(X_{H\circ\Phi}(w), v) &= \chi_2(X_H(\Phi(w)), D\Phi(w), v) \\ &= \chi_2(D\Phi(w)X_{H\circ\Phi}(w), D\Phi(w)v). \end{aligned}$$

Die Behauptung ist gezeigt, wenn wir $X_{H\circ\Phi}(w)$ durch einen beliebigen Vektor $z \in V_1$ ersetzen dürfen. Dazu definieren wir H so, dass (für gegebenes $z \in V_1$) die Beziehung

$$\chi(w, z) = H \circ \Phi(w)$$

erfüllt ist. Dann ist

$$D(H \circ \Phi(w)) = \chi^*(z)$$

und $X_{H\circ\Phi}(w) = z$. □

Definition 4.2.6 *Die dem Vektorfeld X_H zugeordnete Differentialgleichung*

$$\dot{v} = X_H(v)$$

heißt hamiltonsche Gleichung.

Satz 4.2.7 *Es sei (V,χ) ein $2n$–dimensionaler symplektischer Raum mit kanonischen Koordinaten $(q^{(1)},\dots,q^{(n)},p^{(1)},\dots,p^{(n)})$, so dass die symplektische Form in diesen Koordinaten durch die Matrix J dargestellt wird. Dann hat das hamiltonsche Vektorfeld in diesen Koordinaten die Darstellung*

$$X_H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial p^{(i)}} \\ -\dfrac{\partial H}{\partial q^{(i)}} \end{pmatrix} = J\nabla H.$$

Im allgemeineren Fall eines reellen Raumes W mit Dualraum W^* und der symplektischen Struktur $V = W \times W^*$ $\chi((w_1,w_1^*)(w_2,w_2^*)) = w_2^*(w_1) - w_1^*(w_2)$ erhält man X_H in der Form

$$X_H(w,w^*) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial w^*} \\ -\dfrac{\partial H}{\partial w} \end{pmatrix},$$

wobei die partiellen Ableitungen, wie üblich als lineare Funktionale in w^*, bzw. w. Natürlich gelten diese Formeln nur unter der Voraussetzung, dass alle erwähnten Ableitungen existieren.

Beweis. Einfach nachrechnen! □

Korollar 4.2.8 *Längs Trajektorien der hamiltonschen Gleichungen bleibt H konstant.*

Beweis. Sei $v(t)$ eine solche Trajektorie. Wir betrachten $H(v(t)) = H(q(t),p(t))$ und erhalten mittels Differentiation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(v(t)) = \nabla H(v(t))X_H(v(t)) = \chi(X_H(v(t)),X_H(v(t))) = 0.$$

□

Bemerkung 4.2.9 Diese Aussage wird als Energieerhaltungssatz bezeichnet, denn H stellt oft die Gesamtenergie des Systems dar.

Wir haben nun gesehen, wie man einer Hamilton Funktion ein Vektorfeld zuordnet. Eine natürliche Frage ist die der Umkehrung: gegeben sei ein Vektorfeld X, wie stellt man fest ob es hamiltonsch ist und wenn ja wie findet man die Hamilton Funktion dazu? Eine erste Antwort liefert der folgende Satz.

Satz 4.2.10 *Ein lineares Vektorfeld $v \mapsto Av$ ist genau dann hamiltonsch, wenn gilt A ist schiefsymplektisch, d.h.*

$$\chi(v,Aw) = -\chi(Av,w).$$

Beweis. Sei X_H ein hamiltonsches Vektorfeld zur Hamilton Funktion H. Nach Definition gilt dann, für $v, w \in V$

$$\chi(X_H(v), w) = DH(v)w.$$

Differentiation dieser Beziehung nach v ergibt

$$\chi(DX_H(v)u, w) = D^2H(v)(u, w).$$

Daher ist

$$\chi(DX_H(v)u, w) = D^2H(v)(u, w) = D^2H(v)(w, u) = \chi(DX_H(v)w, u) = -\chi(u, DX_H(v)w).$$

Für $X_H(v) = Av$ ergibt dies die gewünschte Eigenschaft an A. Für die Umkehrung sei A schiefsymplektisch. Wir setzen

$$H(v) = \frac{1}{2}\chi(Av, v).$$

Dann ist $Av = X_H(v)$, denn

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H(v)u &= \frac{1}{2}\left(\chi(Au, v) + \chi(Av, u)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\chi(u, Av) + \chi(Av, u)\right) \\ &= \chi(Av, u). \end{aligned}$$

□

Ist die Matrixdarstellung von χ durch J gegeben, so bedeutet A ist schiefsymplektisch, dass

$$JA + A^T J = 0. \tag{4.2.11}$$

Definition 4.2.12 *Die Menge der Matrizen, welche der Bedingung (4.2.11) genügen, wird mit* $\mathbf{sp}(V, \chi)$ *bezeichnet.*

Satz 4.2.13 *Es sei X ein Vektorfeld auf dem symplektischen Raum (V, χ). X ist hamiltonsch, genau dann wenn $DX(v)$ für alle $v \in V$ schiefsymplektisch ist.*

Beweis. Die eine Richtung ist unmittelbare Konsequenz des Beweises zum vorigen Satz. Wir nehmen an, dass $DX(v)$ für jedes $v \in V$ schiefsymplektisch sei. Wir setzen

$$H(v) = \int_0^1 \chi(X(tz), z)dt + c,$$

wobei c eine beliebige reelle Konstante ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}
DH(v)u &= \int_0^1 (\chi(DX(tv)tu, z) + \chi(X(tv), u))\, dt \\
&= \int_0^1 (\chi(tDX(tv)u, v) + \chi(X(tv), u))\, dt \\
&= \chi\left(\int_0^1 tDX(tv)u + X(tv)dt, u\right) \\
&= \chi\left(\int_0^1 \frac{d}{dt}(tX(tv))dt, u\right) \\
&= \chi(X(v), u).
\end{aligned}$$

□

Satz 4.2.14 *Der Fluss eines Vektorfeldes X besteht genau dann aus einer Schar symplektischer Transformationen, wenn X hamiltonsch ist.*

Korollar 4.2.15 $\mathbf{sp}(V, \chi)$ *ist die Lie Algebra der symplektischen Gruppe* $\mathbf{Sp}(V, \chi)$.

Bemerkung 4.2.16 Die Elemente von $\mathbf{sp}(V, \chi)$ nennt man infinitesimal symplektisch.

Beweis von Satz 4.2.14. Wir beweisen zunächst die Aussage für den linearen Fall. Die entsprechende Aussage lautet dann, dass der Fluss eines linearen Vektorfeldes $X(v) = Av$ genau dann aus linearen symplektischen Transformationen φ_t besteht, wenn A schiefsymplektisch ist. Dies sieht man wie folgt ein: es seien $v, w \in V$, so gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi^*\chi)(v, w) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\chi(\varphi_t v, \varphi_t w) \\
&= \chi(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t v, w) + \chi(v, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w) \\
&= \chi(A\varphi_t(v), w) + \chi(v, A\varphi_t w).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Aussage im linearen Fall unmittelbar.

Nun sei X ein beliebiges Vektorfeld, φ_t der zugehörige Fluss. Es seien $v, w \in V$, $\varphi_t(v)$ die Trajektorie von v. Dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(D\varphi_t(v)w) = D\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t(v)\right) w = DX(\varphi_t(v))w.$$

Eine Rechnung, wie im linearen Fall ergibt nun

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\chi(D\varphi_t(v)w, D\varphi_t(v)w) = \chi(DX(\varphi_t(v))D\varphi_t(v)w, D\varphi_t(v)w) + \chi(D\varphi_t(v)w, DX(\cdot)D\varphi_t(v)w).$$

Ist nun X hamiltonsch, so ist $DX(\cdot)$ χ-schiefsymmetrisch, also ist die zeitliche Ableitung links Null und der Term $\chi(D\varphi_t(v)w, D\varphi_t(v)w)$ zeitlich konstant. Für $t = 0$ ist dies gerade die Form $\chi(v, w)$, also folgt dass $\varphi_t^* * \chi = \chi$, was zu beweisen war. Andererseits ergibt die gleiche Rechnung, dass φ_t symplektisch impliziert, dass X hamiltonsch ist, denn $DX(\cdot)$ ist χ-schiefsymmetrisch. □

Wir kommen zum komplexen Fall und damit zur Schrödinger Gleichung[2].

Satz 4.2.17 *Es sei $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum mit einem hermiteschen innerem Produkt $\langle\dot{;}\rangle_{\mathcal{H}}$. Wie bereits oben, sei χ gegeben durch*

$$\chi(\psi_1, \psi_2) = -2\hbar \mathrm{Im}\langle\psi_1, \psi_2\rangle.$$

Es sei $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein komplex-linearer Operator. Dann existiert eine Hamilton Funktion H, so dass $A\psi = X_H(\psi)\ \forall\psi \in \mathcal{H}$ ist, genau dann wenn iA symmetrisch ist, oder anders ausgedrückt wenn

$$\langle iA\psi_1, \psi_2\rangle = \langle\psi_1, iA\psi_2\rangle$$

ist. Die Funktion $H(\psi) = \hbar\langle iA\psi, \psi\rangle$ leistet das Gewünschte. Die zugehörige Hamilton-Gleichung ist $\dot{\psi} = A\psi$.

Beweis. Ist iA symmetrisch, so gilt

$$\langle iA\psi, v\rangle = \langle\psi, iAv\rangle$$

für alle $\psi, v \in \mathcal{H}$. Insbesondere ist die Funktion

$$H(\psi) = \hbar\langle iA\psi, \psi\rangle$$

reell, denn

$$\hbar\langle iA\psi, \psi\rangle = \hbar\langle\psi, iA\psi\rangle = \hbar\overline{\langle iA\psi, \psi\rangle}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
DH(\psi)(v) &= \hbar\langle iAv, \psi\rangle + \hbar\langle iA\psi, v\rangle \\
&= \hbar\langle v, iA\psi\rangle + \hbar\langle iA\psi, v\rangle \\
&= \hbar\overline{\langle iA\psi, v\rangle} + \hbar\langle iA\psi, v\rangle \\
&= \hbar i\langle A\psi, v\rangle - \hbar i\overline{\langle A\psi, v\rangle} \\
&= \hbar i\left(\langle A\psi, v\rangle - \overline{\langle A\psi, v\rangle}\right) \\
&= \hbar i\,(i2\,\mathrm{Im}\langle A\psi, v\rangle) \\
&= -2\hbar\,\mathrm{Im}\langle A\psi, v\rangle \\
&= \chi(\psi, v).
\end{aligned}$$

[2]Erwin Schrödinger (12.8.1887-4.1.1961), österreichischer Physiker, der sich nach Arbeiten über die statistische Thermodynamik mit der Theorie der Atome befasste. Er entwickelte die Wellenmechanik, für die die nach ihm benannte Gleichung zentral ist.

Damit ist gezeigt, dass die Symmetrie von iA dazu führt, dass $\psi \to A\psi$ symplektisch ist und die zugehörige Hamiltonfunktion die angegebene Gestalt hat.

$\psi \mapsto A\psi$ ist hamiltonsch genau dann, wenn A schiefsymplektisch ist, d.h. $\chi(A\psi_1, \psi_2) = -\chi(\psi_1, A\psi_2)$. Dann ist aber

$$\langle A\psi_1, \psi_2\rangle = \mathrm{Re}\langle A\psi_1, \psi_2\rangle - i\,\mathrm{Im}\langle \psi_1, A\psi_2\rangle$$

und

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\langle A\psi_1, \psi_2\rangle &= \mathrm{Im}\langle A(i\psi_1), \psi_2\rangle \\
&= -\mathrm{Im}\langle i\psi_1, A\psi_2\rangle \\
&= -\mathrm{Im}\, i\langle \psi_1, A\psi_2\rangle \\
&= -\mathrm{Im}(i\,\mathrm{Re}\langle \psi_1, A\psi_2\rangle - \mathrm{Im}\,\psi_1, A\psi_2\rangle) \\
&= -\mathrm{Re}\langle \psi_1, A\psi_2\rangle.
\end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich

$$\langle A\psi_1, \psi_2\rangle = -\rangle A\psi_1, \psi_2\rangle.$$

Aus den beiden Relationen

$$\begin{aligned}
\langle iA\psi_1, \psi_2\rangle &= -\mathrm{Im}\langle A\psi_1, \psi_2\rangle + i\,\mathrm{Re}\langle A\psi_1, \psi_2\rangle \\
\langle \psi_1, iA\psi_2\rangle &= \mathrm{Im}\langle \psi_1, A\psi_2\rangle - i\,\mathrm{Re}\langle A\psi_1, \psi_2\rangle
\end{aligned}$$

ergibt sich die Äquivalenz der Symmetrie von iA mit der Schiefsymplektizität von A. □

Definition 4.2.18 *Schreibt man die eben angegebene Hamilton Gleichung in der Form*

$$\mathbf{H}\psi = \mathtt{i}\hbar\dot{\psi},$$

so bezeichnet man diese als Schrödinger–Gleichung. Wir schreiben $\mathbf{H} = i\hbar A$.

Satz 4.2.19 *Es seinen* $\mathcal{H}$, A *wie oben. Dann besteht der Fluss zum linearen Vektorfeld* $\psi \to A\psi$ *aus symplektischen Transformationen* ϕ_t*genau dann, wenn* ϕ_t *unitär ist.*

Beweis. Wir wissen

$$\phi_t \text{ symplektisch} \Leftrightarrow A \text{ ist } \chi\text{–schiefsymmetrisch} \Leftrightarrow A \text{ ist schiefsymmetrisch.}$$

Dann ist aber

$$\frac{d}{dt}\langle \phi_t\psi_1, \phi_t\psi_2\rangle = \langle A\phi_t\psi_1, \phi_t\psi_2\rangle + \langle \phi_t\psi_1, A\phi_t\psi_2\rangle = 0.$$

□