

1. [Computer] Ein numerischer Blick in den Phasenraum

In der Vorlesung haben wir den Phasenraum kennengelernt. Dieser ist für ein Problem mit N Freiheitsgraden durch den $2N$ -dimensionalen Raum der generalisierten Koordinaten $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ und der zugehörigen konjugierten Impulse $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ gegeben. Ein Punkt $\gamma = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ des Phasenraums beschreibt den vollständigen Zustand unseres Systems. Zudem können wir jedem Punkt des Phasenraums einen Fluss, $\dot{\gamma} = (\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}})$ zuordnen, der gerade unseren kanonischen Bewegungsgleichungen entspricht. Es ist wichtig, sich hier zu verbildlichen, dass es sich bei diesem Fluss um ein Feld handelt. Für jeden möglichen Punkt γ des Phasenraums können wir diesen Fluss zu jedem Zeitpunkt aufstellen. Für ein *von der Zeit unabhängiges Problem* gilt insbesondere, dass dieses Fluss-Feld *zeitlich konstant* ist. Wählen wir also einen Anfangszustand γ_0 , wird dieser Punkt dem vorgeschriebenen Fluss im Phasenraum folgen. Dies ist eine alternative Betrachtung der Zeitentwicklung des Systems. Wir wollen dies nun numerisch veranschaulichen und wählen als simples Beispielsystem das *Ebene Pendel* von Blatt 7, Aufgabe 14. Dessen Hamilton-Funktion lautet

$$H = \frac{1}{2} \frac{p_\varphi^2}{m\ell^2} - m\ell^2 \omega^2 \cos(\varphi)$$

mit der Frequenz $\omega^2 = g/\ell$.

- Leite mittels der Hamilton-Funktion die beiden kanonischen Bewegungsgleichungen des Systems her. Wir wollen zudem zur Vereinfachung unserer Betrachtung eine reskalierte Variable $\tilde{p}_\varphi = \frac{p_\varphi}{m\ell^2}$ einführen. Wie lauten die kanonischen Bewegungsgleichungen für diese neue Variable?
- Implementiere die Funktion `eq_of_motion`, die einen Phasenraumpunkt $(\varphi, \tilde{p}_\varphi)$ (Variable `y`) erhält und die entsprechenden Ableitungen $(\dot{\varphi}, \dot{\tilde{p}}_\varphi)$ zurückgibt. Führe dann die Zelle mit der Überschrift **Flow Field in Phase-Space** aus.
- Die Funktion `phase_space_trajectory` nutzt die von dir implementierten Bewegungsgleichungen, um eine Trajektorie $(\varphi(t), p_\varphi(t))$ zu erzeugen. Rufe diese Funktion in der Zelle **Phase Space Trajectories** für die Beispiel-Werte `y_init` = $[10^\circ, 0.0]$, $[90^\circ, 0.0]$, $[179^\circ, 0.0]$ und $[170^\circ, -1.0]$ auf und plote dein Ergebnis in den vorherigen Graph. Beschreibe die Bewegung. Hinweis: Deine Winkelangaben müssen zum Radialmaß konvertiert werden. Dies ist einfach mit der Funktion `radians` des `numpy`-Pakets möglich.
- Diskutiert, was mit dem Fluss (den "Pfeilen" in eurem Plot) passiert, wenn man ein Problem betrachtet, welches explizit von der Zeit abhängt.

2. [Präsenz] Hamilton-Formalismus in Kugelkoordinaten

Wir wollen den Hamilton-Formalismus nun in Kugelkoordinaten anwenden. Dazu betrachten wir ein sphärisches Pendel der Länge ℓ und Masse m , welches nicht nur in einer Ebene schwingt, sondern sich auch frei um seinen Aufhängepunkt drehen kann. Dieses Problem lässt sich einfach in Kugelkoordinaten beschreiben, da wir die Auslenkung zur z -Achse durch den Winkel θ beschreiben können, während der Winkel φ die Drehung der Schwingungsebene angibt.

- (a) Stelle die Lagrange-Funktion des Problems auf und berechne die generalisierten Impulse p_θ und p_φ . Hinweis: Auf Blatt 4, Aufgabe 7 wurde bereits die kinetische Energie in Kugelkoordinaten bestimmt: $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta))$.
- (b) Stelle die Hamilton-Funktion $H = p_\theta \dot{\theta} + p_\varphi \dot{\varphi} - L$ des Problems auf und berechne die kanonischen Bewegungsgleichungen. Gibt es eine Erhaltungsgröße und wenn ja, welche?
Hinweis: Bedenke dabei, dass $H \equiv H(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi)$ eine Funktion der generalisierten Impulse sein muss, um die korrekten Bewegungsgleichungen zu erhalten.

Aus der Vorlesung wissen wir, dass wir durch $H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L$ immer die korrekte Hamilton-Funktion H erhalten. Diese kann (muss aber nicht) $H = T + V$ entsprechen. Letzteres ist immer dann der Fall, wenn die Wahl unserer generalisierten Koordinaten q_i *natürlich* ist. Darunter versteht man, dass der Zusammenhang zwischen kartesischen und generalisierten Koordinaten *nicht explizit* von der Zeit abhängt.

- (c) Gib die kartesischen Koordinaten x , y und z in Abhängigkeit von θ und φ an. Ist die Wahl der Koordinaten natürlich?

Auf Blatt 4, Aufgabe 7 haben wir im letzten Aufgabenteil eine Perle auf einem rotierenden Draht betrachtet. Die Aufstellung der Lagrange-Funktion verlief analog zum sphärischen Pendel, allerdings wurde $\dot{\varphi}$ durch die konstante Winkelgeschwindigkeit ω ersetzt.

- (d) Ist die Wahl der generalisierten Koordinaten in diesem Beispiel immer noch natürlich? Was hat sich am dem Problem verändert, dass die Energie-Erhaltung nicht mehr gegeben ist?