

damped_oscillator_student

June 10, 2025

1 Gedämpfter harmonischer Oszillator

In dieser Übung soll ein einfaches mechanisches System mit Reibung numerisch untersucht werden: der harmonische Oszillator mit linearer Dämpfung.

Die Bewegungsgleichung lautet:

$$m\ddot{q} + \gamma\dot{q} + kq = 0. \quad (1)$$

Wir verwenden den Zustandsvektor $\mathbf{y} = (q, \dot{q})$ und schreiben die Gleichung als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

1.0.1 Ergänze an den Stellen wo ein XXX steht.

```
In [1]: import numpy as np
        from scipy.integrate import solve_ivp
        import matplotlib.pyplot as plt

        # Parameter
        m = XXX      # Masse
        k = XXX      # Federkonstante
        gamma = XXX  # Reibungskonstante

        # Bewegungsgleichung als System erster Ordnung
        def oscillator(t, y):
            q, dq = y
            ddq = XXX
            return [dq, ddq]
```

1.1 Numerische Lösung

Wir integrieren die Gleichung für gegebene Anfangsbedingungen $q(0)$ und $\dot{q}(0)$.

```
In [2]: # Anfangsbedingungen und Zeitbereich
        y0 = XXX  # Anfangslage und -geschwindigkeit
        t_span = (0, XXX)
        t_eval = np.linspace(*t_span, 1000)

        # Integration
        sol = solve_ivp(oscillator, t_span, y0, t_eval=t_eval)
```

```

-----

NameError                                Traceback (most recent call last)

Cell In[2], line 2
      1 # Anfangsbedingungen und Zeitbereich
----> 2 y0 = XXX # Anfangslage und -geschwindigkeit
      3 t_span = (0, 20)
      4 t_eval = np.linspace(*t_span, 1000)

NameError: name 'XXX' is not defined

```

1.2 Darstellung der Lösung

Wir stellen $q(t)$, $\dot{q}(t)$ und den Phasenraum $(q, \dot{q})$ dar. Das Richtungsfeld visualisiert die lokale Dynamik des Systems im Phasenraum. Jeder Pfeil stellt die Richtung der Bewegung $(\dot{q}, \ddot{q})$ am jeweiligen Punkt $(q, \dot{q})$ dar, wie sie sich aus der Bewegungsgleichung ergibt:

$$\dot{q} = v, \quad \dot{v} = -\frac{\gamma}{m}v - \frac{k}{m}q.$$

Die überlagerte Trajektorie zeigt die konkrete Lösung des Anfangswertproblems. Durch den Vergleich mit dem Richtungsfeld wird die qualitative Struktur des Flusses deutlich, etwa Konvergenz gegen den Fixpunkt im Ursprung für große Zeiten (gedämpfte Oszillation).

```

In [ ]: # Phasenraum mit Richtungsfeld
q_vals = np.arange(-2, 2, .1)
dq_vals = np.arange(-1.5, 1.5, .1)
Q, DQ = np.meshgrid(q_vals, dq_vals)

# Richtungsfeld berechnen
dQdt = XXX
dDQdt = XXX
norm = np.sqrt(dQdt**2 + dDQdt**2)

# Plot der Lösung
plt.figure(figsize=(12, 4))
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(sol.t, sol.y[0], label="q(t)")
plt.plot(XXX, XXX, label="dq/dt")
plt.xlabel("t")
plt.title("Zeitverlauf")
plt.legend()
plt.grid()

plt.subplot(1, 2, 2)

```

```

plt.quiver(Q, DQ, dQdt/norm, dDQdt/norm, norm, pivot='mid', scale_units='xy')
plt.plot(sol.y[0], sol.y[1], color='tab:blue', label="Trajektorie")
plt.xlabel("q")
plt.ylabel("dq/dt")
plt.title("Phasenraum mit Richtungsfeld")
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()

```

1.3 Energieverlauf

Die Energie des Systems ist:

$$E(t) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2 \quad (2)$$

Zeige, dass sie durch Reibung monoton abnimmt.

```

In [3]: # Energie berechnen und plotten
E = XXX
plt.plot(sol.t, E)
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("E")
plt.title("Energieverlauf")
plt.grid()
plt.show()

```

NameError

Traceback (most recent call last)

```

Cell In[3], line 2
      1 # Energie berechnen und plotten
----> 2 E = XXX
      3 plt.plot(sol.t, E)
      4 plt.xlabel("t")

```

NameError: name 'XXX' is not defined

In []:

In []: