

Abgabe bis Dienstag, den 24.06.2025, 14 Uhr über die Moodle-Plattform.

20. [10 Punkte] Phasenraumrotation und dynamische Symmetrie beim harmonischen Oszillator

Der harmonische Oszillator beschreibt eine periodische Bewegung, deren Trajektorie im Phasenraum eine Ellipse bildet. In dieser Aufgabe untersuchst du zunächst eine Phasenraumrotation als Koordinatentransformation und analysierst anschließend die tatsächliche dynamische Rotation der Trajektorien im Phasenraum, aus der eine nichttriviale Erhaltungsgröße folgt.

Ein Teilchen der Masse m im Potential $V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$ hat die Hamilton-Funktion

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2.$$

Hinweis: Im Folgenden kannst du zur Vereinfachung $m = \omega = 1$ setzen.

- 2 (a) In einer früheren Aufgabe (Aufgabe 2 Präsenzübung 9) hast du mit Hilfe einer erzeugenden Funktion gezeigt, dass die Transformation

$$Q = q \cos \varphi + \frac{p}{m\omega} \sin \varphi, \quad P = p \cos \varphi - m\omega q \sin \varphi$$

kanonisch ist, hierbei bezeichnet φ den Winkel der Phasenraumrotation. Die kanonische Natur der Transformation kannst du alternativ direkt mit den fundamentalen Poisson-Klammern überprüfen:

$$\{Q, P\} = 1, \quad \{Q, Q\} = 0, \quad \{P, P\} = 0.$$

- 2 (b) Zeige, dass der Hamiltonian H unter dieser Transformation invariant bleibt, also $\bar{H}(Q, P) = H(q, p)$.

Bemerkung: Auch wenn der Hamiltonian unter dieser Transformation invariant ist, handelt es sich nur um eine Koordinatentransformation und nicht um eine physikalische Symmetrie im Sinne des Noether-Theorems.

- 2 (c) Motiviert durch die periodische geschlossene Bahn des harmonischen Oszillators im Phasenraum, führe die komplexe Größe $\alpha(q, p) := p + im\omega q$ ein und berechne ihre Zeitentwicklung mittels

$$\frac{d\alpha}{dt} = \{\alpha, H\} + \frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

Gib eine Lösung $\alpha(t)$ an.

- 2 (d) Folgere daraus, dass die Größe

$$u(q, p, t) = \ln(p + im\omega q) - i\omega t$$

eine Erhaltungsgröße ist, also $\frac{du}{dt} = 0$.

- 2 (e) Interpretiere die Erhaltungsgröße u physikalisch. Welche Eigenschaft der Oszillatorbewegung spiegelt sie wider?

21. [10 Punkte] Hamilton-Jacobi im Gravitationsfeld

Ein Teilchen der Masse m bewege sich im zweidimensionalen Raum unter dem Einfluss eines homogenen Gravitationsfeldes mit Betrag g in negativer y -Richtung. Die Hamilton-Funktion lautet:

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + mgy.$$

- 2 (a) Stelle die Hamilton-Jacobi-Gleichung auf. Verwende den folgenden Trennungsansatz für S , und leite damit eine Differentialgleichung für $f(y)$ her:

$$S(x, y, \alpha_1, \alpha_2, t) = \alpha_2 x + f(y, \alpha_1, \alpha_2) - \alpha_1 t,$$

wobei α_1, α_2 Konstanten sind.

- 2 (b) Integriere die Gleichung aus Teil (a), um eine explizite Form für S zu erhalten.
- 2 (c) Bestimme $\beta_1 = \partial S / \partial \alpha_1$ und $\beta_2 = \partial S / \partial \alpha_2$, die kanonisch konjugierten Größen zu den Konstanten α_1 und α_2 .
- 1 (d) Drücke daraus $x(t)$ und $y(t)$ als Funktionen von $t, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ aus.
- 2 (e) Bestimme die Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ aus den Anfangsbedingungen:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha,$$

wobei α den Abschlusswinkel des Teilchens bezeichnet.

- 1 (f) Zeige, dass die Lösung mit dem bekannten Wurfparabel-Ergebnis übereinstimmt:

$$x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad y(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2.$$