Theoretische Physik Ib
SS 2025

11. Übungsblatt

Theoretische Physik
Universität des Saarlandes
Dr. habil. Philipp Hövel

Abgabe bis Dienstag, den 01.07.2025, 14 Uhr über die Moodle-Plattform.

22. [*8 Punkte*] **Trägheitstensor eines Kegels**

Wir wollen nun den Trägsheitstensor eines Kreiskegels berechnen. Wie schon in Aufgabe 17 gesehen, eignen sich zur Betrachtung Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z). Dabei platzieren wir den Kegel so, dass seine Spitze mit dem Ursprung O des Koordinatensystems zusammenfällt und seine Symmetrieachse entlang der z-Achse verlaufe (siehe Skizze unterhalb). Die Höhe des Kegels sei h, der Radius der Basis R. Zudem gehen wir von einer homogen Massdichte $\mu(\mathbf{r}) \equiv \mu = \frac{m}{V}$ für jedem Punkt des Kegels aus.

1 (a) Um die Matrix-Darstellung des Trägheitstensors $\boldsymbol{\Theta}$ berechnen zu können, muss zunächst die Radialkomponente ρ parametrisiert werden. Stelle daher eine Funktion $\rho(z)$ in Abhängigkeit von h und R auf, die den derzeitigen Radius des Kegels an einer beliebigen Koordinate $z \in [0,\, h]$ beschreibe.

4 (b) Berechne nun die Diagonalelemente Θ_{ii} der Matrix-Darstellung des Trägheitstensors. Formuliere dein Endergebnis dabei so, dass nur noch die Masse $m = \mu V$ auftritt.
Hinweis: *Das Volumen V eines Kreiskegels mit Radius R und Höhe h beträgt $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$. Beachte, dass das Volumenelement in Zylinderkoodinaten $\mathrm{d}\mathbf{r} = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$ lautet. Bei der Integration ist die obere Grenze des radialen Anteils durch $\rho(z)$ aus Teil a) gegeben. Diese Integration muss also vor der Ausführung des Integrals über die z-Komponente stattfinden. Du musst nicht alle drei Berechnung ausführen, wenn du über die Symmetrie die Gleichheit mehrerer Trägheitsmomente begründen kannst.*

2 (c) Unsere Berechnung des Trägheitstensors bezieht sich zur Zeit noch auf den Koordinatenursprung O. Gib die Trägheitsmomente nun bezüglich des Schwerpunkts S_m an. Zeige dazu zunächst, dass dieser bei $\frac{3h}{4}\mathbf{e}_z$ liegt.
Hinweis: *Nutze den Satz von Steiner, um die verschobenen Trägheitsmomente zu berechnen.*

1 (d) Wann handelt es sich bei einem Kegel um einen Kugelkreisel, d.h. wann sind alle Hauptträgheitsmomente gleich?

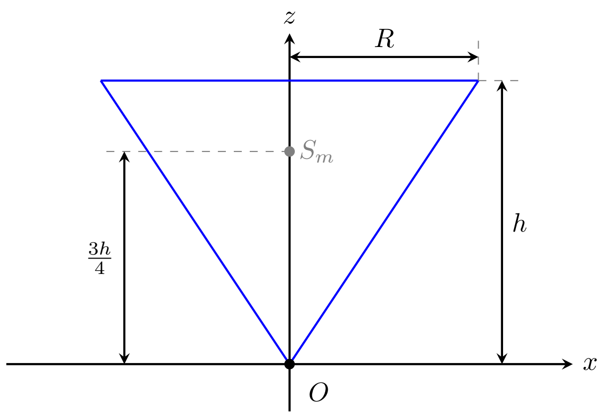

Abbildung 1: Querschnitt in der (x, z)-Ebene durch den Kegel. Die Spitze des Kegels ruhe im Ursprung O des Koordinatensystems und die Symmetrieachse verlaufe entlang der z-Achse. Der Schwerpunkt S_m liegt in diesem Fall auch auf dieser Achse und hat eine Entfernung von $3h/4$ zum Ursprung.

23. [*12 Punkte*] **Schwerer Kreisel**

Beim starren Körper ist zu beachten, dass wir mit zwei verschiedenen Koordinatensystem arbeiten: Dem raumfesten Koordinatensystem S, beispielsweise einem Labor in dem ein Experiment stattfindet, und dem körperfesten System S^*, in dem alle Punkte des Körpers eine feste Position haben. Um sich beiden Systemen wechseln zu können, wurden in der Vorlesung die *Euler-Winkel* (φ, ϑ, ψ)

Info: Adam Wysocki, E2 6, Zi. 4.26, `a.wysocki@lusi.uni-sb.de` oder via Moodle
Marc Thome, E2 6, Zi. 4.23, `thome.marc@lusi.uni-sb.de` oder via Moodle
Joshua Weißenfels, `s9joweis@uni-saarland.de` oder via Moodle
Nic Collingro, `nico00001@uni-saarland.de` oder via Moodle

eingeführt, die über drei konsekutive Drehungen den Übergang $S \longrightarrow S^*$ ermöglichen. Jede einzelne Drehung führt dabei zu einem Zwischensystem, sodass die Transformation folgendermaßen abläuft:

$$S \xrightarrow{\varphi} \hat{S} \xrightarrow{\vartheta} \bar{S} \xrightarrow{\psi} S^*$$

Um ein besseres Verständnis für diese Transformation zu erhalten wollen wir die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}^*$ in S^* in Abhängigkeit der Änderungen des Euler-Winkel, also $\dot{\varphi}$, $\dot{\vartheta}$ und $\dot{\psi}$, aufstellen. Dabei gilt, dass wir $\boldsymbol{\omega}$ abstrakt wie folgt formulieren können:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{e}_z + \dot{\vartheta}\mathbf{e}_{\bar{x}} + \dot{\psi}\mathbf{e}_{z^*} \,.$$

Zudem werden wir die zwei Drehmatritzen R_x und R_z um die x- bzw. z-Achse eines Koordinatensystems benötigen. Diese lauten in der entsprechende Basis

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \qquad R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$\boxed{2}$ (a) Beginnen wir mit dem Anteil $\boldsymbol{\omega}_\varphi = \dot{\varphi}\mathbf{e}_z = (0,\, 0,\, \dot{\varphi})^T$ in S. Dieser beschreibt eine Drehung um die *raumfeste* z-Achse. $\boldsymbol{\omega}_\varphi$ hat in S und $\hat{S}$ die gleiche Form, da die erste Drehung um φ um die z-Achse geschieht und damit die entsprechende Komponente unverändert lässt ($v_z = \hat{v}_z$ für einen beliebigen Vektor $\mathbf{v}$). Um zu S^* zu gelangen, muss daher zunächst eine Drehung um ϑ um die $\hat{x}$-Achse und dann eine Drehung um ψ um die $\bar{z}$-Achse erfolgen. Gib $\boldsymbol{\omega}^*_\varphi$ in S^*an , indem du $R_{\bar{z}}(\psi)R_{\hat{x}}(\vartheta)\boldsymbol{\omega}_\varphi$ berechnest.

Anmerkung: Es ist wichtig, dir klarzumachen, dass wir hier einen Basiswechsel vollziehen: Die Einträge eines Vektors $\mathbf{v} = (v_x,\, v_y,\, v_z)^T$ stellen die Projektionen von $\mathbf{v}$ auf die jeweiligen Koordinatenachsen von S dar, d.h. $\mathbf{v} = v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y + v_z\mathbf{e}_z$. Nach der Anwendung der Drehmatrizen hingegen repräsentieren die drei neuen Einträge $\mathbf{v}^* = (v^*_x,\, v^*_y,\, v^*_z)^T$ die Projektionen auf die *neuen* Koordinatenachsen $\mathbf{v}^* = v^*_x\mathbf{e}_{x^*} + v^*_y\mathbf{e}_{y^*} + v^*_z\mathbf{e}_{z^*}$.

$\boxed{1}$ (b) $\boldsymbol{\omega}_\vartheta = \dot{\vartheta}\mathbf{e}_{\bar{x}}$ hat in $\bar{S}$ (und auch in $\hat{S}$) die einfache Darstellung $(\dot{\vartheta},\, 0,\, 0)$. Bestimme mittels $R_{\bar{x}}(\psi)$ die Darstellung $\boldsymbol{\omega}^*_\vartheta$ in S^*.

$\boxed{1}$ (c) $\boldsymbol{\omega}_\psi$ ist bereits im Bezug auf S^* angegeben. Gib die einfache Vektorform dieses Teils der Winkelgeschwindigkeit in S^* und die komplette Vektordarstellung $\boldsymbol{\omega}^*$ von $\boldsymbol{\omega}$ in S^* an.

$\boxed{2}$ (d) Unser körperfestes Koordinatensystem S^* liege so, dass es ein Hauptachsensystem darstelle. Zudem wollen wir einen symmetrischen Kreisel betrachten ($\Theta_1 = \Theta_2 \equiv \Theta$), d.h. die Matrixform des Trägheitstensors hat die einfache Gestalt $\boldsymbol{\Theta} = \mathrm{diag}(\Theta,\, \Theta,\, \Theta_3)$. Berechne damit und der Darstellung von $\boldsymbol{\omega}$ in S^* einen Ausdruck für die kinetische Energie $T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{*T}\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\omega}^*$ für einen symmetrischen Kreisel.

$\boxed{3}$ (e) Der symmetrische Kreisel bewege sich im Gravitationsfeld und stellt somit einen so genannten *schweren Kreisel* dar. Die Gravitation greife am Schwerpunkt an, der sich in der Entfernung R zum Fixpunkt O des Kreisel befinde, welcher wiederum im Koordinatenursprung von S liege. Stelle die potenzielle Energie V auf, die auf den Schwerpunkt wirkt und berechne mittels der Lagrange-Funktion $L = T - V$ die beiden konjugierten Impulse p_φ und p_ψ.
Hinweis: *Welcher Euler-Winkel beschreibt die Neigung des Kreisels in S. Nutze diesen, um die potenzielle Energie des Problems zu formulieren.*

Für das anliegende Drehmoment gilt $\mathbf{M} = R\mathbf{e}_{z^*} \times \mathbf{F}_g = -mgR\,(\mathbf{e}_{z^*} \times \mathbf{e}_z) = \dot{\mathbf{L}}$. Daraus folgt sofort, dass die jeweiligen Projektionen von $\mathbf{L}$ auf $\mathbf{e}_z$ und $\mathbf{e}_{z^*}$ Erhaltungsgrößen sind. Diese entsprechen gerade p_φ bzw. p_ψ.

$\boxed{3}$ (f) Gib die Energie $E = T + V$ an und nutze die Erhaltungsgrößen p_φ und p_ψ, um $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$ zu ersetzen. Damit erhältst du einen Ausdruck $E \equiv E(\vartheta,\, \dot{\vartheta})$.

Obiger Ausdruck $E(\vartheta,\, \dot{\vartheta})$ kann durch die Substitution $u = \cos(\vartheta)$ in die Form $\frac{1}{2}\dot{u} + V_{\text{eff}}(u) = 0$ überführt werden. Eine qualitative Diskussion dieser Gleichung zeigt (ähnlich wie bei der Planeten-Bahn des Keplerproblems), dass u und damit ϑ zwischen zwei Umkehrpunkten hin und her oszilliert. Dies steht um Kontrast zu einem *kräftefreien Kreisel*, für den ϑ eine Konstante war. Diese zusätzliche Pendelbewegung des Winkels ϑ führt zu dem Phänomen der *Nutation*.

Info: Adam Wysocki, E2 6, Zi. 4.26, `a.wysocki@lusi.uni-sb.de` oder via Moodle
Marc Thome, E2 6, Zi. 4.23, `thome.marc@lusi.uni-sb.de` oder via Moodle
Joshua Weißenfels, `s9joweis@uni-saarland.de` oder via Moodle
Nic Collingro, `nico00001@uni-saarland.de` oder via Moodle