

53 Drehimpuls & Bewegungsgleichungen

50

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \underline{L} &= \sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i \times \dot{\underline{r}}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\underline{r}_0 + \underline{d}^{(i)}) \times (\dot{\underline{r}}_0 + \underline{\omega} \times \underline{d}^{(i)}) \\
 &= \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i (\underline{r}_0 \times \dot{\underline{r}}_0)}_{\substack{M \\ \underline{L}_S \\ \text{"Bahndrehimpuls" \\ des Schwerpunkts}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \underline{d}^{(i)} \times \dot{\underline{r}}_0}_{=0 \text{ Schwerpunkt}} + \underline{r}_0 \times \left(\underline{\omega} \times \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \underline{d}^{(i)}}_{=0} \right) \\
 &\quad + \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \underline{d}^{(i)} \times (\underline{\omega} \times \underline{d}^{(i)})}_{\text{Relativdrehimpuls } \underline{L}_R \text{ (Eigendrehimpuls)}}
 \end{aligned}$$

$$(b) \quad \underline{L} = \underbrace{\underline{r}_0 \times M \dot{\underline{r}}_0}_{\substack{\underline{L}_S \\ \text{"Bahndrehimpuls" \\ des Schwerpunkts}}} + \underbrace{\int d^3r \, \rho(\underline{r}) \underline{d} \times (\underline{\omega} \times \underline{d})}_{\substack{\underline{L}_R \\ \text{relativ}}}$$

$$= \underline{L}_R = \int d^3r \, \rho(\underline{r}) \left[\underline{d}^2 \underline{\omega} - (\underline{d} \cdot \underline{\omega}) \underline{d} \right]$$

$$\Rightarrow \underline{L}_R = \underline{\Theta} \underline{\omega}$$

$$\text{Komponentenweise: } L_{R\mu} = \sum_{\nu=1}^3 \underbrace{\int d^3r \, \rho(\underline{r}) \left[\underline{d}^2 \delta_{\mu\nu} - d_\mu d_\nu \right]}_{\Theta_{\mu\nu}} \omega_\nu$$

$\Rightarrow$ im Allgemeinen $\underline{L}_R \nparallel \underline{\omega}$, $\underline{\omega}$ kann von $\underline{0}$ gedreht werden!

$\underline{L}_R \parallel \underline{\omega}$, wenn $\underline{\omega}$ in Richtung einer Hauptträgheitsachse liegt.

$$\underline{\Theta} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix}$$

Wähle raumfestes System im Schwerpunkt: $\underline{r}_0 = 0$

$$\Rightarrow \underline{L} = \sum_{i=1}^N m_i \underline{d}^{(i)} \times (\underline{\omega} \times \underline{d}^{(i)}) = \underline{L}_R$$

(Schwerpunkt: $\underline{r}_0 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \underline{d}^{(i)}$) $\Rightarrow M \underline{r}_0 = \sum_{i=1}^N m_i \underline{d}^{(i)}$

Newton'sche Gleichung für i -tes Teilchen: (vgl. 2.1)

$$m_i \underline{\ddot{d}}^{(i)} = \underbrace{\underline{F}^{(i) \text{ außen}}}_{\text{äußere Kräfte z.B. } m_i \underline{g}} + \underbrace{\sum_{j=1}^N \underline{F}^{(ij)}}_{\text{innere Kräfte}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \underline{\ddot{d}}^{(i)}}_{M \underline{\ddot{r}}_0} = \sum_{i=1}^N \underline{F}^{(i) \text{ außen}} + \sum_{i,j=1}^N \underline{F}^{(ij)}$$

actio = reactio ($\underline{F}^{(ij)} = -\underline{F}^{(ji)} \Rightarrow \underline{F}^{(ij)} + \underline{F}^{(ji)} = 0$) folgt:

Schwerpunktssatz: $M \underline{\ddot{r}}_0 = \sum_{i=1}^N \underline{F}^{(i) \text{ außen}} = \underline{F}^{(\text{außen})}$

Der Schwerpunkt bewegt sich so, als ob die gesamte Masse als starrer Körper in ihm versetzt wäre und alle Resultierende $\underline{F}^{(\text{außen})}$ aller äußeren Kräfte in ihm angreifen.

• innere Kräfte beeinflussen nicht die Schwerpunktsbewegung!

$$\sum_{i=1}^N m_i \underline{d}^{(i)} \times \underline{\ddot{d}}^{(i)} = \sum_{i=1}^N \underline{d}^{(i)} \times \underline{F}^{(i) \text{ außen}} + \underbrace{\sum_{i,j=1}^N \underline{d}^{(i)} \times \underline{F}^{(ij)}}_{=0}$$

$$\frac{d}{dt} \underline{L}$$

$$\underline{d}^{(i)} \times \underline{F}^{(ij)} + \underline{d}^{(j)} \times \underline{F}^{(ji)} \stackrel{\underline{F}^{(ji)} = -\underline{F}^{(ij)}}{=} (\underline{d}^{(i)} - \underline{d}^{(j)}) \times \underline{F}^{(ij)}$$

Anteilung Kräftegleichgewicht
zwischen i und $j \rightarrow \underline{d}^{(i)} - \underline{d}^{(j)}$

$$\Rightarrow \text{Drehimpulsatz: } \sum_{i=1}^N m_i \underline{\dot{d}}^{(i)} \times \underline{\ddot{d}}^{(i)} = \sum_{i=1}^N \underline{\dot{d}}^{(i)} \times \underline{\dot{d}}^{(i)} \text{ versch.}$$

§2

$$(\Rightarrow) \quad \frac{d}{dt} \underline{L} = \underline{M} \quad \text{Drehmoment}$$

(i) $\frac{d}{dt} \underline{L} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \underline{\dot{d}}^{(i)} \times (\underline{\omega} \times \underline{\dot{d}}^{(i)}) \right) \stackrel{\text{Komponenten}}{=} \frac{d}{dt} (L_i \underline{e}_i) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^3 \Theta_{ij} \omega_j \underline{e}_i \right)$

$$= \sum_{j=1}^3 \dot{\Theta}_{ij} \omega_j \underline{e}_i + \sum_{j=1}^3 \Theta_{ij} \dot{\omega}_j \underline{e}_i$$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^3 \dot{\Theta}_{ij} \omega_j \underline{e}_i}_{\substack{\text{Abh. f. } \dot{\omega} \text{ f. } \underline{e}_i \text{ konstant} \\ \text{bei Körperfesten System, } \underline{e}_i \text{ konstant}}} + \sum_{j=1}^3 \Theta_{ij} \omega_j (\underline{\omega} \times \underline{e}_i) \stackrel{\substack{\text{Körperfest} \\ \text{bleibt}}}{=} \frac{d}{dt} \underline{L} + \underline{\omega} \times \underline{L} = \underline{M}$$

(ii) alternative Transformations von Laborsystem auf Körperfestes System: ($\underline{r}_0 = 0$)

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{d}{dt} \right)^* + \underline{\omega} \times$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \underline{L} = \left(\frac{d}{dt} \right)^* \underline{L} + \underline{\omega} \times \underline{L} = \underline{M}$$

$$= \underbrace{\underline{\Theta} \dot{\underline{\omega}}}_{\substack{\uparrow \\ \text{festem Körperfesten System}}} + \underline{\omega} \times \underline{\Theta} \underline{\omega} = \underline{M}$$

$\Rightarrow$ Euler'sche Gleichungen: Körperfeste Achsen = Hauptachsenträgheitsachsen: $L_i = \Theta_i \omega_i$

$$\Theta_1 \dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2) \omega_2 \omega_3 = M_1$$

$$\Theta_2 \dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3) \omega_1 \omega_3 = M_2$$

$$\Theta_3 \dot{\omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1) \omega_1 \omega_2 = M_3$$

$$\underline{\omega} \times \underline{\Theta} \underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_2 \omega_3 \\ \omega_3 \omega_1 \\ \omega_1 \omega_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Theta_1 \omega_1 \\ \Theta_2 \omega_2 \\ \Theta_3 \omega_3 \end{pmatrix}$$

• nichtlinear, gekoppelt!

§4 Beispiele

BSP. 1) Symmetrisches Kugel: $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta \neq \Theta_3$ (Kugelsymmetrie)
 im Körper für System S^* (Stetigkeit der Funktionen vorausgesetzt)
 $\hookrightarrow K=0$

13

$$\Rightarrow \Theta_3 \dot{\omega}_3 \neq (\Theta - \Theta_3) \omega_1 \omega_2 = 0 \Rightarrow \omega_3 = \text{const.}$$

$$\Theta_1 \dot{\omega}_1 = (\Theta - \Theta_3) \omega_2 \omega_3 \Rightarrow \dot{\omega}_1 = \frac{\Theta - \Theta_3}{\Theta} \omega_2 \omega_3$$

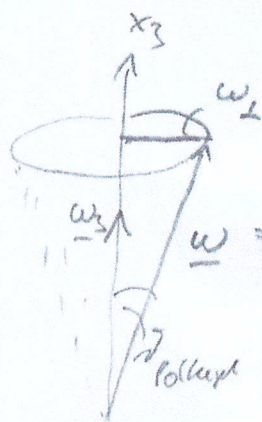
$$\Rightarrow \ddot{\omega}_1 = \frac{\Theta - \Theta_3}{\Theta} \omega_3 \dot{\omega}_2 = - \left(\frac{(\Theta - \Theta_3)^2}{\Theta} \omega_3^2 \right) \omega_1$$

$$\dot{\omega}_2 = - \frac{\Theta - \Theta_3}{\Theta} \omega_1 \omega_3$$

$$\Rightarrow \omega_1(t) = \omega_{\perp} \sin(\omega_0 t - \varphi_0) \text{ mit } \omega_0 = \frac{\Theta - \Theta_3}{\Theta} \omega_3$$

$$\omega_2(t) = -\omega_{\perp} \cos(\omega_0 t - \varphi_0), \quad \omega_3, \varphi_0 \text{ Integrationskonstanten}$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_{\perp}^2 = \text{const.}$$



$$\omega \Rightarrow \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = \omega_{\perp}^2 + \omega_3^2 \Rightarrow \varphi = \arctan \frac{\omega_{\perp}}{\omega_3}$$

$$\underline{\omega} \text{ und } \underline{L} \text{ (mit } L_j = \Theta_j \omega_j \text{)} \text{ rotieren um}$$

Flywheelachse

wegen $\Theta_3 \neq \Theta$ werden ω_1 und ω_2 auf verschiedenen Geraden gestreckt

$$L^2 = \Theta^2 \omega_{\perp}^2 + \Theta_3^2 \omega_3^2 (= L_{\perp}^2 + L_3^2)$$

$$\varphi_{\text{Präzessionswinkel}} = \arctan \frac{L_{\perp}}{L_3} = \arctan \frac{\Theta \omega_{\perp}}{\Theta_3 \omega_3} = \varphi \text{ (Euler-Winkel)}$$

id. $\varphi_{\text{Präzessionswinkel}} \neq \varphi_{\text{Polwinkel}}$

