

VL WS 2025/2026, Dr. habil. Philipp Hövel
philipp.hoewel@uni-saarland.de, E26, Raum 4.03

VL: Do 16-18 ($\Rightarrow 16:00-17:30?$) E26, E04 } 4h $\Rightarrow$ 60h
??? Fr 16-18 ($\Rightarrow$ verlegen)

UE: Start Woche 2 $\Rightarrow 2h \Rightarrow 30h$
Termin offen / zu besprechen

$\hookrightarrow$ MaxLauer

Umfang 8 ECIS $\Rightarrow 8 \times 30h = 240h \longrightarrow 150h$
Zeit außerhalb der
Vorlesung: 10h/Woche!

Prüfung: Option 1: 2 Klausuren (Mechanik & Elektrodynamik)
 $\uparrow$ $\uparrow$
max. 8 Wochen nach VL-Ende
Option 2: 1 Klausur noch VL-Ende $\rightarrow$ Woche um 9.2.26

Vorlesung: nicht spezifiziert!

Vorschlag: 12 Übungsblätter (je 2 Aufgaben) im Kollektiv
 $\rightarrow$ vorbereiten zu Klausur (Recherche...)
 $\rightarrow$ gemeinsam lösen in UE (Hintergrund, Musterlösung)
 $\rightarrow$ Fehlerführung bei Dokumentationen: reichen

Idee: - gemeinsames Portfolio an Aufgaben
- Unterrichtsvorbereitungssimulationen

Stil: ausfaersikonorientiert, anregend, inkorporierend, 2
animierend, viele Hinweise rechts, links, oben, unten, ...
=> "Bergföhren & Coach"

Hilfsmittel: - VL-Notizen

- Glossar (individuell)
- Lehrbücher (s. Moodle)
- Formeln als Sammlung getext.
- TutorBot

0. Übersicht

Klassische Mechanik: • Bewegung von Körpern (**detekamentäre**, d.h.
(vgl. Relativitätstheorie) **aus Anfangsbedingungen** vorher berechenbar;
Determinierbarkeit **Kausal**, d.h. verursacht durch **Kräfte**)
Statistische Mechanik

• Grundlage der theoretischen Physik

↳ physikalische Grundgesetze

↳ Paradigme einer physikalischen Theorie

(mathematische - geometrische Struktur der Dynamik)

• Fokus: - Symmetrien & Invarianzprinzipien

- geometrische Struktur

- Nichtlineare Theorie

- Grundlage für andere Theorien

- Verallgemeinerte **Hamiltonsche** Formulierung

↳ **Lagrange** → Feldtheorien (z.B.: E-Dynamik
Relativitätstheorie)

↳ **Hamilton** → Quantenmechanik, statistische Mechanik

- Differenzialprinzip: **D'Alembert**

- Integralprinzip: **Hamilton**

1. Newtonsche Mechanik

1. Newtonsche Mechanik

1. Herangehensweise
2. Newtonsche Axiome
3. Galilei-Transformation
4. Weitere Folgerungen

3

1.1 Herangehensweise (der Pädelskern)

Kinematik & Dynamik von Systemen von Massepunkten
ohne Zwangsbedingungen

1.2 Newtonsche Axiome

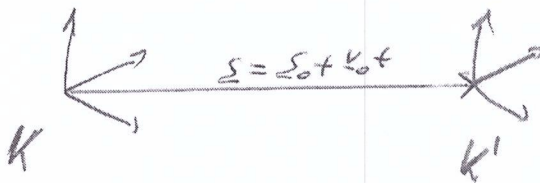
- (I) Kräftefrei Körper bewegen sich geradlinig und gleichförmig
(lex prima / Trägheitsgesetz)
- (II) Beschleunigung: $\underline{a} := \frac{d}{dt} \underline{v} \sim \underline{F}$ **linear** ($\underline{F} = \dot{\underline{p}} \stackrel{m=const.}{=} m \underline{a}$)
(lex secunda / Bewegungsgesetz)
- (III) **actio = reactio**
(lex tertia / Reaktionsgesetz)
- (IV) Lineare Superposition von Kräften
(lex quarta / Superpositions-gesetz)

- Bem.: - Raum ist **homogen** & **isotrop** (3D, Euklidischer Raum) / nicht-relativistisch
- Zeit ist universell ("universelle" Zeitabmessungsmöglichkeit)
- Ereignisse: $(\underline{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$
- dynamische Variable $\underline{x}(t)$: **Bahnkurve / Trajektorie**
 $\underline{v}(t) := \frac{d}{dt} \underline{x}(t) \equiv \dot{\underline{x}}(t)$ **Geschwindigkeit** 
(Tangentenvektor)
- 1. Axiom $\Rightarrow$ **Inertialsystem** (def. durch kräftefreie Bewegung)
 $\hookrightarrow$ Folgerung: Galilei-Transformation

1.3 Galilei-Transformation (Folgerung aus (I))

4

- allgemeine Transformation zwischen 2 Inertialsystemen
 $\{K, t\} \longrightarrow \{K', t'\}$



$$\underline{r}(t) = \underline{R} \underline{r}'(t') + \underline{v}_0 t + \underline{s}_0 \quad \text{mit } \underline{R} : \text{Drehmatrix}$$

$$t = t' + t_0$$

$$\underline{\dot{r}}(t) = \underline{\dot{r}}'(t') + \underline{v}_0$$

Newton'sche Mechanik ist Lorentzinvariant gegenüber der Galilei-Transformation

↳ Galilei invariant

1.4 weitere Folgerungen

(II): $\underline{a} \approx \underline{\ddot{x}}$: Proportionalitätsfaktor: m : träge Masse

⇒ Bewegungsgleichung: $\underline{F}(\underline{r}, \underline{\dot{r}}, t) = m \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2}$ (3 gekoppelte i.a. nichtlineare DGLs)
 eindeutige Lösung zu Anfangsbedingungen $(\underline{r}_0, t_0) : \underline{r}(t; \underline{r}_0, t_0)$

(III) $\underline{F}^{(12)} + \underline{F}^{(21)} = 0$ (Achtung: Notation verschiedener Bücher!)

↑ ↑
 Kraft Kraft auf
 von 2 auf 1 1 auf 2 (Matrixnotation $\begin{pmatrix} \underline{F}^{(11)} & \underline{F}^{(12)} \\ \underline{F}^{(21)} & \underline{F}^{(22)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Teilchen 1} \\ \text{Teilchen 2} \end{pmatrix}$)

⇒ Same äußere Kräfte:

$$\left. \begin{aligned} m^{(1)} \underline{a}^{(1)} &= m^{(1)} \frac{d \underline{v}^{(1)}}{dt} = \underline{F}^{(12)} \\ m^{(2)} \underline{a}^{(2)} &= m^{(2)} \frac{d \underline{v}^{(2)}}{dt} = \underline{F}^{(21)} \end{aligned} \right\} \frac{d}{dt} \left(\underbrace{m^{(1)} \underline{v}^{(1)}}_{\underline{p}^{(1)}} + \underbrace{m^{(2)} \underline{v}^{(2)}}_{\underline{p}^{(2)}} \right) = \underline{F}^{(12)} + \underline{F}^{(21)} = 0$$

⇒ Erhaltung des Gesamtimpulses $\underline{p}^{(1)} + \underline{p}^{(2)} = \text{const.}$

(IV) Vektorcharakter der Kraft $\Rightarrow$ Separation

Kräfte $\sim$ Felder $\Rightarrow$ lineare Feld-Theorien (z.B. Elektrodynamik)

oder: Bewegungsgleichung $\vec{F}(\vec{v}) = m \vec{v}$ i.A. nichtlinear in $\vec{v}$
(Ausnahme: harmonischer Osz.)

$$\vec{F}(\vec{v}) \sim \vec{v}$$

etwa: Gravitationskraft $\vec{F}^{(12)} = -G m_S^{(1)} m_S^{(2)} \frac{\vec{r}^{(1)} - \vec{r}^{(2)}}{|\vec{r}^{(1)} - \vec{r}^{(2)}|^3}$

$m_S^{(i)}$: Schwere Masse (Kopplungsstärke der Gravitationswechselwirkung)

exp. Erfahrung: $m_S^{(i)} \sim m^{(i)}$ (alle Körper fallen gleich schnell)

bei Wahl der Gravitationskonstante $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$

$$m_S^{(i)} = m^{(i)}$$

Einheiten: MKS (Meter, Kilogramm, Sekunde)

Größe	SI-Einheit	CGS-Einheit
Länge	m	cm
Zeit	s	s
Masse	kg	g
Geschw.	m s^{-1}	cm s^{-1}
Beschl.	m s^{-2}	$\text{Gal} = \text{cm s}^{-2}$ (Gal)
Kraft	$\text{N} = \text{kg m s}^{-2}$ (Newton)	$\text{dyn} = \text{g cm s}^{-2}$ (Dyn)
Energie	$\text{J} = \text{N m}$ (Joule)	$\text{erg} = \text{dyn cm}$ (Erg)
Leistung	$\text{W} = \text{J s}^{-1}$ (Watt)	erg s^{-1}

Schreibweise: $[\vec{v}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ $[\vec{F}] = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = [m][\vec{v}]$

Hilfsmittel für Konsistenzcheck bei Rechnungen

2. Das d'Alembertsche Prinzip

6

2. D'Alembertsches Prinzip

1. Zwangsbedingungen und Zwangskräfte
2. Virtuelle Verrückungen
3. D'Alembertsches Prinzip der virtuellen Arbeit
4. Generalisierte Koordinaten
5. Lagrange-Gleichungen 2. Art

2.1 Zwangsbedingungen und Zwangskräfte

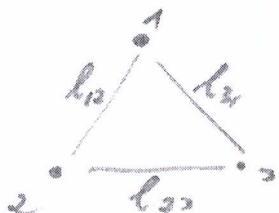
Ein System von N Massenpunkten hat $f = 3N$ Freiheitsgrade, wenn keine Zwangsbedingungen vorliegen.

Idee: Verminderung der Zahl der Freiheitsgrade durch

ii) holonome Zwangsbedingungen ("integrabel"/ganz gesetztlich)

$$f_M(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0, \quad M = 1, \dots, A \quad (\text{unabhängig: } \text{Rang} \left(\frac{\partial f_M}{\partial x_i} \right) = 1)$$

Bsp: Starrkörper aus 3 Teilchen



$$f_1 = |x_1 - x_2| - l_{12} = 0$$

$$f_2 = |x_2 - x_3| - l_{23} = 0$$

$$f_3 = |x_3 - x_1| - l_{31} = 0$$

Absstände fest

$$\Rightarrow f = 3N - A = 3 - 3 = 0$$

allgemein: Starrkörper aus N Teilchen: $f_M = |x_i - x_j| - l_{ij} = 0$

N	anzahl Gleichungen	A	$f = 3N - A$
1	0	0	3
2	1	1	5
3	2	3	6
4	3	6	$4 \cdot 3 - 6 = 6$
5	3	9	$5 \cdot 3 - 9 = 6$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$N \geq 4$	3	$3N - 6$	6

(2x Translation, 3x Rotation)



Die Bahn $r_i(t)$ sollen 1 unabhängige Zwangsbedingungen

7

erfüllen: $\int_M (\dot{r}_1(t), \dot{r}_2(t), \dots, \dot{r}_N(t)) dt = 0 \quad \forall t$

↳ Totale Zeitabhängigkeit: $\frac{dr_i}{dt}$

$$\frac{df_M}{dt} = \sum_{i=1}^N \underbrace{\nabla_{r_i} f_M}_{\text{Gradient}} \cdot \dot{r}_i + \frac{\partial f_M}{\partial t} = 0$$

↳ differenzielle Schreibweise: (vollständiges Differenzial)

$$df_M = \sum_{i=1}^N \nabla_{r_i} f_M \cdot dr_i + \frac{\partial f_M}{\partial t} dt = 0$$

(ii) nichtholonomes Zwangsbedingungen

$$\sum_{i=1}^N a_{Mi}(\dot{r}_1, \dots, \dot{r}_N, t) \cdot dr_i + a_{M0}(\dot{r}_1, \dots, \dot{r}_N, t) dt = 0 \quad M=1, \dots, l$$

Pfaffsche Differenzialform (nichtintegrabel, d.h. es existiert

kein integrierbarer Faktor g_M , so dass: $\sum_i g_M a_{Mi} \cdot dr_i + g_M a_{M0} dt = df_M$
also $g_M a_{Mi} = \nabla_{r_i} f_M$)

Bedeutung: beliebige Positionen $r_1, \dots, r_N$ zulässig, aber Bewegung lokal eingeschränkt. (etwa Geschwindigkeit längs der Bahn

$$\sum_i a_{Mi} \cdot \dot{r}_i + a_{M0} = 0)$$

Bsp: • Reagenz mit Auto auf Ebene: Jeder Punkt erreichbar, aber lokale Bewegung (manövrieren) durch Lenkstange gegeben.

• Schlittschuhlaufen: Kufen erlebten nur Vor & Zurück, aber nicht seitwärts.

(iii) in beiden Fällen:

rhonomes Zwangsbedingung (zeitabhängig)
skonomes ———— (nicht explizit zeitabhängig, statisch)

(iv) Ungleichungen (z.B. Gas in Behälter mit Wandlinien)

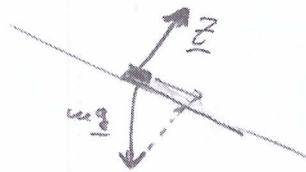
$\Rightarrow$ Bewegungsgleichungen: $m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underbrace{\underline{F}_i}_{\substack{\text{äußere} \\ \text{Kräfte}}} + \underbrace{\sum_{j=1}^N \underline{F}_{ij}}_{\substack{\text{innere} \\ \text{Kräfte}}} =: \underline{X}_i \quad i=1, \dots, N$

Leistungsspezifische Kräfte müssen unter Nebenbedingungen $f_k(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, t) = 0$ gelöst werden.
oder
 $\sum_{i=1}^N \underline{a}_i \cdot \underline{v}_i + \underline{a}_{M0} = 0$

Idee: Nebenbedingungen sollen durch Zwangskräfte $\underline{Z}_i$ erzwingen werden

$$m \ddot{\underline{r}}_i = \underline{X}_i + \underline{Z}_i \quad i=1, \dots, N$$

Bsp: 2D-Bewegung auf schiefer Ebene $\rightarrow$ effektive 1D-Bewegung



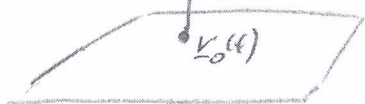
2.2 Virtuelle Verschiebungen

virtuelle Verschiebung $\{\delta \underline{r}_i\}$: infinitesimale Änderung der Koordinaten, die zu fester Zeit ($\delta t = 0$) die (holonom bzw. nichtholonom) Zwangsbedingungen erfüllen.

(Vgl.: reale Verschiebungen $d\underline{r}_i$: um Zeitintervall dt entlang der Bahn)

$$\delta f_k := \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha} \frac{\partial f_k}{\partial r_{i\alpha}} \delta r_{i\alpha} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^N \underline{a}_i \cdot \delta \underline{r}_i = 0$$

Bsp: Bewegung in Ebene: $\underline{n} \cdot (\underline{r} - \underline{r}_0(t)) = 0$
 $\uparrow \underline{n}$: Normalenvektor Bewegung der Ebene



$\Rightarrow$ holonom Zwangsbedg. entspricht N Massenpunkten

$$f(\underline{r}_i) = \underline{n} \cdot (\underline{r}_i - \underline{r}_0(t)) = 0 \quad i=1, \dots, N$$

$$\Rightarrow df = \underline{n} \cdot (d\underline{r}_i - \underline{v}_0(t) dt) = 0 \quad \text{mit} \quad \underline{v}_0 = \frac{d}{dt} \underline{r}_0(t)$$

$$\text{also i.A.:} \quad \underline{n} \cdot d\underline{r}_i = \underline{n} \cdot \underline{v}_0(t) dt \neq 0$$

$$\text{also} \quad df = \underline{n} \cdot \underline{r}_i = 0 \Rightarrow \underline{r}_i \perp \underline{n} \quad \text{bei festgehaltener Ebene}$$



2.3 D'Alembertsches Prinzip der virtuellen Arbeit

9

System von N Massenpunkten mit Zwangsbedingungen:

↳ Bewegungsgleichungen mit Zwangskräften:

$$m_i \ddot{\underline{x}}_i - \underline{X}_i = \underline{Z}_i \quad i=1, \dots, N$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\underline{x}}_i - \underline{X}_i) \cdot \delta \underline{x}_i = \sum_{i=1}^N \underline{Z}_i \cdot \delta \underline{x}_i$$

virtuelle Arbeit der eingeprägten & der Zwangskräfte

Kräfte

Bsp: (i) Bewegung auf Fläche $f(\underline{x}, t) = 0$ (etwa Ebene $\underline{x} \cdot (\underline{x}_i = \underline{v}(t)) = 0$)

↳ Zwangskräfte $\perp$ Fläche $\Rightarrow \underline{Z}_i = \lambda_i (t_1, \dots, t_n, t) \nabla f$
 $\underline{Z}_i = \underline{Z}_i$ für Ebene

virtuelle Arbeit: $\underline{Z}_i \cdot \delta \underline{x}_i = \lambda_i \underbrace{\nabla f \cdot \delta \underline{x}_i}_{\perp \text{ Fläche}} = \lambda_i \underbrace{\delta f}_{\perp \text{ Fläche}} = 0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^N \underline{Z}_i \cdot \delta \underline{x}_i = 0$ virtuelle Arbeit verschwindet

aber reelle Arbeit: $\sum_{i=1}^N \underline{Z}_i \cdot d\underline{x}_i \neq 0$ im Allgemeinen

(ii) starre Körper $f_{ij} = |\underline{x}_i - \underline{x}_j| - l_{ij} = 0$

↳ Zwangskräfte in Richtung $\underline{x}_i - \underline{x}_j \Rightarrow \underline{Z}_{ij} = \lambda_{ij} \frac{\underline{x}_i - \underline{x}_j}{|\underline{x}_i - \underline{x}_j|} = \lambda_{ij} \frac{\underline{x}_i - \underline{x}_j}{r_{ij}}$

actio = reactio: $\underline{Z}_{ij} = -\underline{Z}_{ji} \Rightarrow \lambda_{ij} = \lambda_{ji}$

$\Rightarrow$ gesamte Zwangskraft auf m_i : $\underline{Z}_i = \sum_{j \neq i} \underline{Z}_{ij} = \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} \frac{\underline{x}_i - \underline{x}_j}{r_{ij}}$

$\Rightarrow \underline{Z}_i \cdot \delta \underline{x}_i = \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} \frac{\underline{x}_i - \underline{x}_j}{r_{ij}} \cdot \delta \underline{x}_i \neq 0$ i. A.

↳ verschwindet nicht für ein beliebiges $\delta \underline{x}_i$, aber:

$$\sum_{i=1}^N \underline{Z}_i \cdot \delta \underline{x}_i = \sum_{ij} \lambda_{ij} \frac{\underline{x}_i - \underline{x}_j}{r_{ij}} \cdot \delta \underline{x}_i$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij} \lambda_{ij} \frac{\underline{x}_i - \underline{x}_j}{r_{ij}} \cdot \delta (\underline{x}_i - \underline{x}_j) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \lambda_{ij} \delta r_{ij} \stackrel{\text{Absteigbarkeit}}{=} 0$$

$$= \delta r_{ij}, \text{ da } \delta |\underline{r}| = \delta \left(\sqrt{(\underline{r} \cdot \underline{r})} \right) = \frac{1}{2} (\underline{r} \cdot \underline{r})^{-\frac{1}{2}} 2 \underline{r} \cdot \delta \underline{r} \\ = \delta (|\underline{r}|) = \frac{\underline{r}}{r} \cdot \delta \underline{r}$$

Allgemeine Form: $\sum_{i=1}^N \vec{z}_i \cdot \vec{r}_i = 0$

10

$\Rightarrow \sum_{i=1}^N (\vec{m}_i \vec{r}_i - \vec{X}_i) \cdot \vec{r}_i = 0$ d'Alambertsches Prinzip

• Differenzialprinzip / Variationsprinzip

Der wirklichen Bewegung Zustand ist der Extremalzustand (in dem Sinn, dass der gesamte Wirkleistung Null ist.)

↳ Variationsprinzip mit Nebenbedingungen:

(allg. Notation: $\vec{r}_i \rightarrow \vec{x}_j$, $\vec{X}_i \rightarrow \vec{K}_j$, $\vec{a}_j \rightarrow \vec{\phi}_j^{\mu}$ Korrelationsfunktion $i=1, \dots, N, j=1, \dots, 3N$)

$$\sum_{j=1}^{3N} (\vec{m}_j \ddot{\vec{x}}_j - \vec{K}_j) \cdot \delta \vec{x}_j = 0 \quad \text{Nebenbedingungen} \quad \sum_{j=1}^{3N} \vec{\phi}_j^{\mu} \cdot \delta \vec{x}_j = 0, \mu=1, \dots, A$$

Lösung mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren

Falls $\delta \vec{x}_i$ frei wählbar, dann würde $(\vec{m}_j \ddot{\vec{x}}_j - \vec{K}_j) = 0$ gelten

Idee: Umschreiben, sodass ein Satz von Faktoren frei wählbar ist

(i) Addition Nebenbedingungen mit Lagrange-Multiplikatoren λ_{μ} :

$$\sum_{j=1}^{3N} \left(\vec{m}_j \ddot{\vec{x}}_j - \vec{K}_j - \sum_{\mu=1}^A \lambda_{\mu} \vec{\phi}_j^{\mu} \right) \cdot \delta \vec{x}_j = 0$$

(ii) Eliminieren $\delta \vec{x}_1, \dots, \delta \vec{x}_A$ aus den Nebenbedingungen, dann sind $\delta \vec{x}_{A+1}, \dots, \delta \vec{x}_N$ frei wählbar.

(iii) Bestimme $\lambda_1, \dots, \lambda_A$ sodass

$$\vec{m}_j \ddot{\vec{x}}_j - \vec{K}_j - \sum_{\mu=1}^A \lambda_{\mu} \vec{\phi}_j^{\mu} = 0 \quad \text{für } j=1, \dots, A$$

(λ_{μ} für $\lambda_{\mu}^{(t)}$ als Funktionen von $\vec{x}_j^{(t)}$)

$$\Rightarrow \sum_{j=A+1}^{3N} \left(\vec{m}_j \ddot{\vec{x}}_j - \vec{K}_j - \sum_{\mu=1}^A \lambda_{\mu}^{(t)} \vec{\phi}_j^{\mu} \right) \cdot \delta \vec{x}_j = 0$$

frei wählbar

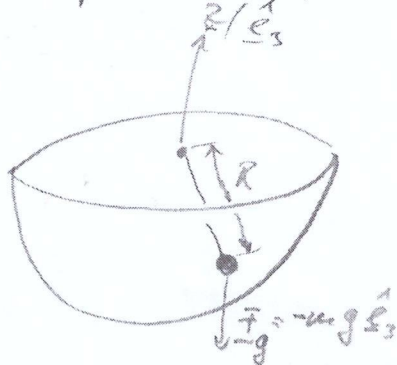
$$\Rightarrow \vec{m}_j \ddot{\vec{x}}_j - \vec{K}_j - \sum_{\mu=1}^A \lambda_{\mu}^{(t)} \vec{\phi}_j^{\mu} = 0 \quad \text{Lagrange-Gleichung ist}$$

Für holonom Zwangsbedingungen $\vec{m}_j \ddot{\vec{x}}_j - \vec{K}_j - \sum_{\mu=1}^A \lambda_{\mu} \vec{\phi}_j^{\mu} = 0$

Lagrange-I Formel (immer) (nicht für TPI + I + L) (nicht)

(II) $\rightarrow$ physikalischer Modell

11



Zwangsbedg: $f(r(t)) = r(t)^2 - R^2 = 0$

⑦ Trick: $\dot{f}(r) = 2r \cdot \dot{r} = 0$

$$\ddot{f}(r) = 2\dot{r}^2 + 2r \cdot \ddot{r} = 0$$

Bewegungsgleich: $m\ddot{r} = m\underline{g} + \underline{Z} \stackrel{f}{=} m\underline{g} + 2\lambda \underline{r}$

$\underline{Z}$: in Richtung $\underline{r}$ plausibel $\Rightarrow$ Annahme: $\underline{Z} = 2\lambda \underline{r}$

$$\Rightarrow m\underline{r} \cdot \ddot{r} = m\underline{r} \cdot \underline{g} + 2\lambda \underbrace{\underline{r} \cdot \underline{r}}_{=R^2}$$

⑧ $\uparrow$

$$-m\dot{r}^2 = m\underline{r} \cdot \underline{g} + 2\lambda R^2 \Rightarrow 2\lambda = -\frac{m}{R^2} (\dot{r}^2 + \underline{r} \cdot \underline{g})$$

$$\Rightarrow \underline{Z} = -\frac{m}{R^2} (\underbrace{\dot{r}^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{Zentrifugalkraft}}} + \underline{r} \cdot \underline{g}) \underline{r} \quad (\text{Gesamtwirkung hat abhängig!})$$

$$\Rightarrow \ddot{r} = \underline{g} - \frac{1}{R^2} (\dot{r}^2 + \underline{r} \cdot \underline{g}) \underline{r}$$

(Allgemein: $\underline{Z} = \lambda \underline{\nabla} f \Rightarrow \underline{Z} = \lambda 2\underline{r}$)

$\uparrow$
Gradient $\perp$ auf Fläche $f=0$, wie auch $\underline{Z}$, wenn Tangentialbewegung nicht zu berücksichtigen

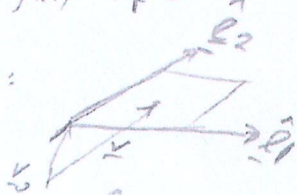
2.4 Generalisierte Koordinaten

12

Idee: Finde $f = 3N - 1$ Koordinaten, die unabhängig voneinander sind und dennoch die Zwangsbedingungen erfüllen. **Generalisierte**

Koordinaten $\{q_1, \dots, q_f\}$ $f = \#$ Freiheitsgrade (unfrei holonom ZB)

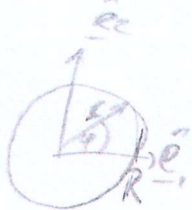
Bsp: (i) Ebene:



$$\underline{r}(t) = \underline{r}_0(t) + q_1 \underline{\hat{e}}_1 + q_2 \underline{\hat{e}}_2 \Rightarrow f=2$$

unabhängige Koordinatengrößen

(ii) Kreis:



$$\underline{r}(t) = R (\cos \varphi \underline{\hat{e}}_1 + \sin \varphi \underline{\hat{e}}_2) \Rightarrow f=1$$

beliebige Vektoren $\underline{r}_i$ durch $q_1, \dots, q_f$ ausdrücken:

$$\underline{r}_i(q_1, \dots, q_f, t) \quad \underline{r}_i = \sum_{j=1}^f \left(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \right) dq_j \Rightarrow \sum_{i=1}^N \underline{x}_i \cdot d\underline{r}_i = \sum_{j=1}^f \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N \underline{x}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \right)}_{Q_j} dq_j$$

generalisierte Kräfte

2.5 Lagrange-Gleichungen 2. Art

$$\text{d'Alembertsches Prinzip: } \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot d\underline{r}_i = \sum_{i=1}^N \underline{x}_i \cdot d\underline{r}_i = \sum_{j=1}^f Q_j dq_j$$

links Seite durch Lösungsgleichungen durch Definition der **Kinetischen**

$$\text{Energie } T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad \text{zu: } \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot d\underline{r}_i = \sum_{j=1}^f \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} dq_j$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j} \quad \text{mit } j=1, \dots, f$$

Lagrange-Gleichungen 2. Art

- gilt unbeeinträchtigt für Zwangsbedingungen (sooft kein generalisierte Koordinaten)

Für **konserватiven Kräfte**: $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$ mit $V(q_1, \dots, q_f, t)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T-V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T-V}{\partial q_j} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$$

Lagrange-Funktion

Einschub: Berechnung der linken Seite

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^f \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \right) \delta \mathbf{q}_j$$

$$= \sum_{j=1}^f \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} m_i \mathbf{r}_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \right) - m_i \mathbf{r}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \right) \right\} \delta \mathbf{q}_j$$

Mit $\frac{d}{dt} \mathbf{r}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^f \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \right) \dot{\mathbf{q}}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \mathbf{v}_i$ folgt $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{q}_j}$, und $\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j}$

denn: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \right) = \sum_k \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_k \partial \mathbf{q}_j} \right) \dot{\mathbf{q}}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial \mathbf{q}_j}$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \left\{ \sum_k \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_k} \right) \dot{\mathbf{q}}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right\} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \dot{\mathbf{q}}_j \right) + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^f \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j}) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \right\} \delta \mathbf{q}_j \quad (*)$$

mit $m_i \mathbf{v}_i \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \left(\frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \right)$ und $m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \right)$ folgt:

$$(*) = \sum_{j=1}^f \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_j} - 0_j \right\} \delta \mathbf{q}_j = 0, \quad T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2$$

↑
for convenience

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_j} = Q_j}$$

für TP I + II d. Lohmann

wichtig

Herleitung

Für konservative Kräfte: $Q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j}$

14

$$\left(V(r_1(q_1, \dots, q_f, t), r_2(q_1, \dots, q_f, t), \dots, r_N(q_1, \dots, q_f, t)) = V(q_1, \dots, q_f, t) \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial q_j} V = 0 \quad \text{für allgemeine (s.c.)}$$

und der Definition der Lagrange-Funktion $L(\{q_j\}_j, \{\dot{q}_j\}_j, t) = T - V$ folgt:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0} \quad j = 1, \dots, f$$

Anwandschema / Kochrezept:

Kochrezept der Lagrange-Gleichungen 2. Art:

1. Auswählen generalisierter Koordinaten: $q_1, \dots, q_f$, die die (holonomen) Zwangsbedingungen erfüllen: $r_i = r_i(q_1, \dots, q_f, t) \equiv r_i(q_k, t)$
2. Berechnen von Geschwindigkeiten $v_i(q_k, \dot{q}_k, t) = \frac{d}{dt} r_i(q_k, t)$ und kinetischer Energie $T(q_k, \dot{q}_k, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i(q_k, \dot{q}_k, t)^2$
3. Potenzielle Energie für konservative Kräfte: $V(q_k, t) = V(r_i(q_k, t))$
 $\Rightarrow$ Lagrange-Funktion $L(q_k, \dot{q}_k, t) = T(q_k, \dot{q}_k, t) - V(q_k, t)$
(Potenzielle/Lage-) Energie für nichtkonservative Kräfte: $Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i \frac{\partial}{\partial q_j} \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_f, t)$
4. Aufstellung der Bewegungsgleichungen ($j = 1, \dots, f$):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

5. Lösen der Bewegungsgleichungen

Bem.: Bei Geschwindigkeitsabhängigen Potenzial

- etwa ein elektromagnetisches Potenzial: $V_{\text{em}} = e(\phi - \underline{v} \cdot \underline{A})$ -

ergibt sich: $Q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}$

Idea: $\sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i \cdot \underline{F}_i = \sum_{i=1}^N \left(- \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) \underline{F}_i$

Für V_{em} : $Q_j = - \frac{\partial V_{\text{em}}}{\partial x_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V_{\text{em}}}{\partial \dot{x}_j} = e \left(- \frac{\partial \phi}{\partial x_j} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \underline{A}}{\partial \dot{x}_j} - \frac{dA_j}{dt} \right)$

$$= e \left(- \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial t} - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_k}{\partial x_k} \dot{x}_k + \sum_{k=1}^3 \dot{x}_k \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \right)$$

$$= e \left(- \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_k} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k} \right) \dot{x}_k \right) \stackrel{(*)}{=} \underline{F} = e \left(- \nabla \phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} + \underline{v} \times (\nabla \times \underline{A}) \right)$$

Herleitung nicht lös TP I + II S. 46

$$\text{Allgemein: } \sum_{i=1}^N \underline{x}_i \cdot d\underline{r}_i = \sum_{j=1}^f \left(\sum_{i=1}^N \underline{x}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

$$= \sum_{j=1}^f \left(\sum_{i=1}^N \left(-\frac{\partial V}{\partial \underline{r}_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{\underline{r}}_i} \right) \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

$$= \sum_{j=1}^f \left(-\frac{\partial V}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{\underline{r}}_i} \right) \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} \stackrel{N}{=} \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial \underline{r}_i} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \stackrel{N}{=} \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial \dot{\underline{r}}_i} \frac{\partial \dot{\underline{r}}_i}{\partial q_j}$$

$$= \sum_{j=1}^f \underbrace{\left(-\frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right) \right)}_{Q_j} \delta q_j$$

$$(i) \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N m \ddot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 \right) = \frac{d}{dt} T$$

$$(ii) \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = - \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N \underbrace{V_{ij}(\vec{r}_{ij})}_{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} + \sum_{i=1}^N V_i(\vec{r}_i) \right) \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

Kooperative Kräfte

$$= - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N V_{ij}(\vec{r}_{ij}) + \sum_{i=1}^N V_i(\vec{r}_i) \right)$$

$$= - \frac{d}{dt} V \quad \left(\frac{d}{dt} V_{ij}(\vec{r}_{ij}) = \left(\nabla_{\vec{r}_i} V_{ij}(\vec{r}_{ij}) \right) \cdot \dot{\vec{r}}_i + \left(\nabla_{\vec{r}_j} V_{ij}(\vec{r}_{ij}) \right) \cdot \dot{\vec{r}}_j \right)$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} = 0$$

(erh. können dissipative Prozesse, z.B. Reibung, die Energieerhaltung stören/aufheben)

Unter Berücksichtigung von Zwangsbedingungen: $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$ auf rechter Seite

$$\frac{d}{dt} (T+V) = - \sum_{\mu=1}^1 \lambda_{\mu} \frac{\partial f_{\mu}}{\partial t}$$

$$\text{wegen } \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \sum_{\mu=1}^1 \sum_{i=1}^N \lambda_{\mu} \left(\nabla_{\vec{r}_i} f_{\mu} \right) \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

$$\text{und } 0 = \frac{df_{\mu}}{dt} = \sum_{i=1}^N \nabla_{\vec{r}_i} f_{\mu} + \frac{\partial f_{\mu}}{\partial t}$$

$\Rightarrow$ Energie ist erhalten, wenn Zwangsbedingungen skleronom sind.
($\frac{\partial f_{\mu}}{\partial t} = 0$)

Lagrange II & Newton: (Kooperative Kräfte) (1 Punktformel)

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} m \sum_{j=1}^3 \dot{x}_j^2, \quad q_1 = x_1, \quad q_2 = x_2, \quad q_3 = x_3$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[\left(\frac{1}{2} m \sum_{k=1}^3 \dot{q}_k^2 \right) - V(q_1, q_2, q_3) \right]$$

$$- \frac{\partial}{\partial q_j} \left[T(q_1, q_2, q_3) - V(q_1, q_2, q_3) \right]$$

$$= \frac{d}{dt} m \dot{q}_j + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0$$

$$\Leftrightarrow m \ddot{q}_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \quad j=1, 2, 3$$

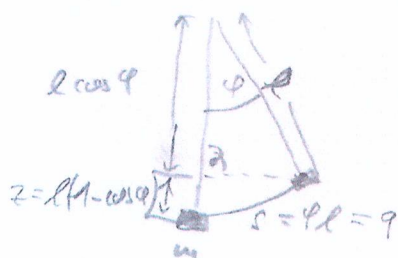
$$\begin{aligned}
 T(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k, t) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k, t)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left[\sum_{j=1}^f \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \dot{\mathbf{q}}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right]^2 \\
 &= a + \sum_{j=1}^f b_j \dot{\mathbf{q}}_j + \sum_{j,m=1}^f c_{jm} \dot{\mathbf{q}}_j \dot{\mathbf{q}}_m
 \end{aligned}$$

$\uparrow$
 System nach
 Ordnung in $\dot{\mathbf{q}}_j$

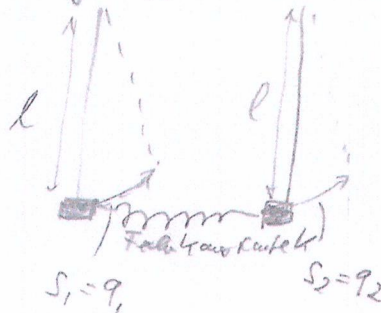
Nach für stationäre Zwangsbedingungen ist T eine konstante
 Bilinearform ($a = b_j = 0$) in $\dot{\mathbf{q}}_j$ ($j=1, \dots, f$)

2.6 Normalenschwinger

a) 1 Pendel



b) 2 gekoppelte Pendel



Nachfolgende:

- holonom, stationäre Zwangsbedingungen

Annahme: Potenzial V mit stabiler Ruhelage

- Wählt die generalisierten Koordinaten $q_1, \dots, q_f$ mit Ruhelage $q_1 = \dots = q_f = 0$
- Entwickelt das Potenzial um die Ruhelage:

$$\begin{aligned}
 V(q_1, \dots, q_f) &= V(0, \dots, 0) + \sum_{j=1}^f \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial q_j} \right)_0}_{= -Q_j = 0} q_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^f \underbrace{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right)_0}_{= V_{jk}} q_j q_k + \dots \\
 &\quad \text{d. B. ist } 0 \quad \text{Ruhelage}
 \end{aligned}$$

(Offset der Energi)

$$\Rightarrow V(q_1, \dots, q_f) \approx \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^f V_{jk} q_j q_k \geq 0 \quad \text{weil } V_{jk} = V_{kj}$$

• kinetische Energie: $T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^f T_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \geq 0$ mit $T_{jk} = T_{kj} \approx \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \right)_0 \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_k} \right)_0$
 pos. definite quadratische Form, da Ruhelage stabil & $T \geq 0$

Fall a) $T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2$

18

$$V(q) = mg z(q) = mg l (1 - \cos \varphi(q)) = mg l (1 - \cos \frac{q}{l})$$

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial q} \right)_0 &= mg \frac{l}{l} \sin \frac{q}{l} \Big|_0 = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} \right)_0 &= m \frac{g}{l} \cos \frac{q}{l} \Big|_0 = m \frac{g}{l} \end{aligned} \right\} \Rightarrow V(q) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} \right)_0 q^2 = \frac{1}{2} m \frac{g}{l} q^2$$

$$L = T - V$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} \stackrel{!}{=} \frac{d}{dt} (m \dot{q}) + m \frac{g}{l} q$$

$$= m \ddot{q} + m \frac{g}{l} q$$

$$\Rightarrow 0 = \ddot{q} + \frac{g}{l} q \quad \text{oder} \quad 0 = \ddot{q} + \omega^2 q \quad \text{mit} \quad \omega^2 = \frac{g}{l}$$

Fall b): $T = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$ Lösung: $q(t) = A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}$

$$V(q_1, q_2) = mg l (1 - \cos \frac{q_1}{l}) + mg l (1 - \cos \frac{q_2}{l}) + \frac{k}{2} (q_1 - q_2)^2$$

Hooke'sches Gesetz

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i^2} \right)_0 = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i^2} \right)_0 = m \frac{g}{l} + k$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_0 = mg \underbrace{\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\sin \frac{q_2}{l} \right)}_{=0} - k^2 \frac{\partial}{\partial q_1} (q_1 - q_2) = -k = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_1} \right)_0$$

$$\Rightarrow V(q_1, q_2) \approx \frac{1}{2} m \frac{g}{l} (q_1^2 + q_2^2) + \frac{1}{2} k (q_1 - q_2)^2$$

in Matrixnotation: $\underline{T} \equiv \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \quad \left\{ \frac{d^2 \underline{q}}{dt^2} \right\} = \begin{pmatrix} m \frac{g}{l} + k & -k \\ -k & m \frac{g}{l} + k \end{pmatrix} \underline{q} \equiv \underline{V}$

Bewegungsgleichung: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j=1, 2$

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{q}_1 + m \frac{g}{l} q_1 + k (q_1 - q_2) &= 0 \\ m \ddot{q}_2 + m \frac{g}{l} q_2 - k (q_1 - q_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Lineare gekoppelte DGLs}$$

Lösungssatz:

$$q_j = A_j e^{i\omega t} \Rightarrow \ddot{q}_j = -\omega^2 A_j e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \text{Eigenwertgleichung: } \begin{pmatrix} m \frac{g}{l} + k - m\omega^2 & -k \\ -k & m \frac{g}{l} + k - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \text{charakteristische Gleichung: } 0 = \det \begin{pmatrix} \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\omega^4 - 2\omega^2 \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right) + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \omega_{1,2}^2 = \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right) \pm \frac{k}{m} = \begin{cases} \frac{g}{l} \\ \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m} \end{cases}$$

Eigenfrequenzen: $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$: ungestörte Eigenfrequenz

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}} =: \sqrt{\omega_0^2 + 2\tilde{\omega}^2}$$

Eigenvektoren:

$$\text{zu } \omega_1: kA_1^{(1)} - kA_2^{(1)} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normierung: $m \sum_k |A_k|^2 = 1 \Rightarrow \sum_{j,k} A_j^* \tilde{A}_k A_k = 1$

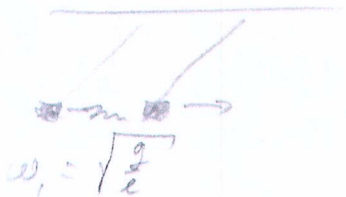
$$\text{zu } \omega_2: -kA_1^{(2)} - kA_2^{(2)} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

allgemeine Lsg: $\begin{pmatrix} A_1^{(1)} & A_2^{(1)} \\ A_1^{(2)} & A_2^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} q_1 + q_2 \\ q_1 - q_2 \end{pmatrix}$ $\leftarrow$ Schwerpunktkoordinate $\leftarrow$ Relativkoordinate

Normalisierung:

$$= \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Unkeine noch möglich}$$

$$q_j(t) \sim A_j^{(1)} Q_1 + A_j^{(2)} Q_2$$



$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

gleichphasig

$\Rightarrow$ Überlagern: Schwebung

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}}$$

gegenphasig

Naamalscheining ganz allgemein:

20

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^f (T_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k - V_{jk} q_j q_k)$$

$$G \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_l} = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{jk=1}^n \frac{\partial}{\partial \dot{q}_l} (\dot{q}_j \dot{q}_k)}_{= \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_l} \dot{q}_k + \dot{q}_j \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_l}} = \frac{1}{2} \sum_k T_{lk} \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_j T_{jl} \dot{q}_j = \sum_k T_{lk} \dot{q}_k = \sum_k T_{kl} \dot{q}_k$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_k T_{ik} \ddot{q}_k$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^4 T_{jk} \frac{\partial}{\partial q_1} (q_j q_k) = \dots = \sum_k V_{1k} q_k$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0 \Leftrightarrow \sum_k \left(T_{lk} \ddot{q}_k + V_{lk} q_k \right) = 0, l=1, \dots, f$$

Léveaux DKS!

Ausatz: $g_h(t) = A_h e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^f (V_{kk} - \omega^2 T_{kk}) A_k = 0$$

- Eigenwertgleichung für ω^2 : $\omega_k^2, k=1, \dots, f$
- konvergenz, liefert OLS für $A_k \Rightarrow A_k^{(k)}$

Nichttriviale Lsg genau dann, wenn $\det(V_{ek} - \omega^2 T_{ek})_1 = 0$

Chas. A. King Jan 22

ally. Lsg: $q_k(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{a=1}^L c_a A_k^{(a)} e^{i \omega_a t} \right\}$

Reading class Reflected. $9\frac{1}{4}'0'$, $9\frac{1}{4}'0'$

V_{IT} pos deficit $\rightarrow \omega^2 > 0$

$$\sum_{k=1}^N (V_{ek} - \omega^2 T_{ek}) A_k = 0 \quad \text{for } \sum_{k=1}^N A_k = 0$$

$$\sum_{l=1}^L V_{cl} A_l^* c_l - \omega^2 \sum_{l=1}^L T_l A_l^* c_l = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{\sum_{l=1}^L V_{cl} c_l}{\sum_{l=1}^L T_l c_l}$$



Normalkoordinaten:

21

Idee: Transformiere auf neue Koordinaten Q_d , sodass die

Bewegungsgleichungen entkoppeln $\ddot{Q}_d + \omega_d^2 Q_d = 0, d=1, \dots, f$

$\Rightarrow$ Hauptachsen Trafo der symmetrischen Matrizen V_{kl}, T_{kl}

$\Rightarrow$ Diagonalisierung dieser Trafo mit (reell gewählten) Eigenvektoren $A_k^{(k)}$.

$$q_k(t) = \sum_{d=1}^f A_k^{(d)} Q_d(t) \Rightarrow \underline{q} = \underline{A} \underline{Q}$$

Check Diagonalform von V_{kl}, T_{kl} (gleichzeitig diagonalisierbar)

$$I: \sum_{k=1}^f (V_{kl} - \omega_d^2 T_{kl}) A_k^{(d)} = 0 \quad | \cdot \sum_{l=1}^f A_l^{(d)}$$

$$II: \sum_{l=1}^f (V_{kl} - \omega_p^2 T_{kl}) A_l^{(p)} = 0 \quad | \cdot \sum_{k=1}^f A_k^{(p)}$$

$$\Rightarrow I-II: \sum_{kl=1}^f (V_{kl} - V_{kl}) A_l^{(p)} A_k^{(d)} - (\omega_d^2 T_{kl} - \omega_p^2 T_{kl}) A_l^{(p)} A_k^{(d)} = 0$$

$$\Rightarrow (\omega_d^2 - \omega_p^2) \sum_{k=1}^f A_l^{(p)} T_{kl} A_k^{(d)} = 0$$

$\neq 0$ für $d \neq p$

$T_{ll} \stackrel{!}{=} 0$ für $d \neq p$ (transversale kinetische Energie)

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^f A_l^{(p)} T_{kl} A_k^{(d)} = \delta_{p,d} \quad (\text{geeignete Normierung der Eigenvektoren } A_k \text{ für } d=p)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^f A_l^{(p)} V_{kl} A_k^{(d)} = \omega_d^2 \sum_{k=1}^f A_l^{(p)} T_{kl} A_k^{(d)} = \omega_d^2 \delta_{p,d}$$

$\Rightarrow T_{kl}$ & V_{kl} gleichzeitig diagonalisierbar

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^f (T_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k - V_{jk} q_j q_k)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{d,p=1}^f \left(\underbrace{\sum_{j,k=1}^f A_j^{(p)} T_{jk} A_k^{(d)}}_{\delta_{p,d}} \dot{Q}_d \dot{Q}_p - \underbrace{\sum_{j,k=1}^f A_j^{(p)} V_{jk} A_k^{(d)}}_{=\omega_d^2 \delta_{p,d}} Q_d Q_p \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_d (\dot{Q}_d^2 - \omega_d^2 Q_d^2) \Rightarrow \text{Entkoppeln: } \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_d} - \frac{\partial L}{\partial Q_d} = 0 \Rightarrow \ddot{Q}_d + \omega_d^2 Q_d = 0$$

2.7 Das Zweikörperproblem

22

Idee: Herleitung der Bewegungsgleichung über Reduzierung der Freiheitsgrade / Identifizierung der Integrale der Bewegung / Erhaltungsgroßen

Allgemein: f Freiheitsgrade $\Rightarrow f$ DGL 2. Ordnung $\Rightarrow 2f$ Integrationskonstanten (Anfangsbedingungen)
 $\Rightarrow$ max. $2f$ Integrale der Bewegung
 $\uparrow$
(dann wäre Problem gelöst: $I_r(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = C_r, r=1, \dots, f$)

Hier: **Zweikörperproblem**: 2 Massen m_1, m_2 mit innerer Wechselwirkung

$V(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)$: **Zentralpotential**

(Sonn-erde, Erde-Mond)

$\Rightarrow f = 6 \Rightarrow 12$ Integrale der Bewegung möglich

(i) $V(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)$ translationsinvariant

$$\Rightarrow \underline{P} = \underline{P}_1 + \underline{P}_2 = \text{const} \quad (\text{Impuls } \underline{P} = M \underline{\dot{R}})$$

$$\Rightarrow \text{Schwerpunkt: } \underline{R} = \frac{1}{M} \underline{P} t + \underline{R}_0, \quad M = m_1 + m_2$$

$\Rightarrow$ Schwerpunkt bewegt sich geradlinig und gleichförmig

$\Rightarrow 6$ Integrationskonstanten $\underline{P}, \underline{R}_0$

(ii) $V(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)$ rotationsinvariant

$$\Rightarrow \underline{L} = m_1 \underline{r}_1 \times \dot{\underline{r}}_1 + m_2 \underline{r}_2 \times \dot{\underline{r}}_2 = \text{const} \quad (\text{Drehimpuls})$$

$\Rightarrow 3$ Integrationskonstanten $\underline{L}$

(iii) zeitliche Translationsinvariant, konservativer Kraft

$$\Rightarrow \underline{E} = \frac{1}{2} m_1 \dot{\underline{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\underline{r}}_2^2 + V(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) = \text{const} \quad (\text{Energie})$$

$\Rightarrow 1$ Integrationskonstante $\underline{E}$

$\Rightarrow 10$ Integrale der Bewegung identifiziert

$\Rightarrow$ Es bleiben $12 - 10 = 2$ Integrationskonstanten (Nullpunkt von Zeit- & Winkel skala)

2.7.1 Impuls- & Drehimpulserhaltung

Idee: Lagrange-Formalismus: $L = T - V = \frac{1}{2} m_1 \dot{\underline{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\underline{r}}_2^2 - V(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)$

Verallgemeinerte Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \underline{R} = \frac{1}{M} (m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2)$$

Schwerpunkts Koordinate

$$\begin{pmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{pmatrix} = \underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$$

Relativer Koordinate

$$\hookrightarrow \underline{r}_1 = \underline{R} + \frac{m_2}{M} \underline{r}, \quad \underline{r}_2 = \underline{R} - \frac{m_1}{M} \underline{r}$$

$$\dot{\underline{r}}_1 = \dot{\underline{R}} + \frac{m_2}{M} \dot{\underline{r}}, \quad \dot{\underline{r}}_2 = \dot{\underline{R}} - \frac{m_1}{M} \dot{\underline{r}}$$

$$\Rightarrow L = \underbrace{\frac{M}{2} \dot{\underline{R}}^2}_{\text{Nachrechnen!}} + \frac{1}{2} \mu \dot{\underline{r}}^2 - V(r), \quad \begin{matrix} r = |\underline{r}| \text{ Abstand} \\ \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ reduzierte Masse} \end{matrix}$$

$$\bullet \frac{\partial L}{\partial \underline{R}} = 0 \Rightarrow \underline{R} \text{ ist zyklische Variable} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \underline{R}} = M \dot{\underline{R}} = \underline{P}_R = \text{const.}$$

$\Rightarrow$ Zugeschwindigkeit konstant
Impuls = const.

$$\Rightarrow \underline{R} = \frac{1}{M} \underline{P} \underline{t} + \underline{R}_0$$

• Schwerpunktssystem als Inertialsystem! obd. $\underline{R} = \dot{\underline{R}} = 0$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} \mu \dot{\underline{r}}^2 - V(r), \quad \underline{r}_1 = \frac{m_2}{M} \underline{r}, \quad \underline{r}_2 = -\frac{m_1}{M} \underline{r}$$

$$\dot{\underline{r}}_1 = \frac{m_2}{M} \dot{\underline{r}}, \quad \dot{\underline{r}}_2 = -\frac{m_1}{M} \dot{\underline{r}}$$

$$\text{Drehimpuls: } \underline{L} = m_1 \underline{r}_1 \times \dot{\underline{r}}_1 + m_2 \underline{r}_2 \times \dot{\underline{r}}_2$$

$$= m_1 \frac{m_2}{M} \underline{r} \times \frac{m_2}{M} \dot{\underline{r}} + m_2 \left(-\frac{m_1}{M}\right) \underline{r} \times \left(-\frac{m_1}{M}\right) \dot{\underline{r}}$$

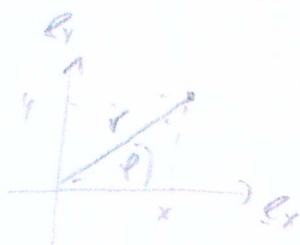
$$= \left(\frac{m_1 m_2^2}{M^2} + \frac{m_2 m_1^2}{M^2} \right) \underline{r} \times \dot{\underline{r}} = \mu \underline{r} \times \dot{\underline{r}} = \text{const}$$

$\uparrow$
Nachrechnen

$$\frac{(m_1 + m_2) m_1 m_2}{M^2} = \frac{m_1 m_2}{M} = \mu$$

$$\Rightarrow \underline{L} \cdot \underline{r} = 0, \underline{L} \cdot \dot{\underline{r}} = 0 \Rightarrow \underline{r} \text{ und } \dot{\underline{r}} \text{ in Ebene senkrecht zu } \underline{L} \text{ (im Schwerpunktssystem)}$$

→ 2D Bewegung! ⇒ Polarkoordinaten
(Orbit $\perp \mathbb{E}_z$)



$$x = r \cos \varphi \Rightarrow \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$y = r \sin \varphi \Rightarrow \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$\Rightarrow \dot{r}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2 \dot{\varphi}^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)$$

$$= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

$$\Rightarrow L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r)$$

$$L = L_z \Rightarrow$$

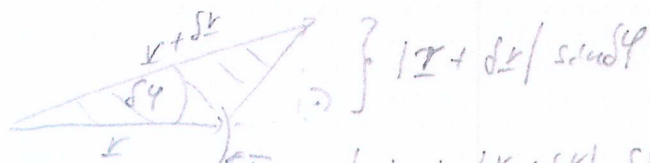
$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \varphi \text{ ist zyklisch} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} = L_z = \frac{1}{2} L = \text{const}$$

$$\uparrow$$

$$m(x\dot{y} - y\dot{x}) = m r^2 \dot{\varphi}$$

• **2. Kepler'sches Gesetz**: Flächensatz (geometrische Interpretation von $m r^2 \dot{\varphi} = L = \text{const}$)

Der Radiusvektor $\underline{r}$ überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
(Flächengeschwindigkeit hat $\frac{dF}{dt} = \text{const}$)



$$\delta F = \frac{1}{2} |r| |r + \delta r| \sin \delta \varphi \approx \frac{1}{2} |r| |\delta r| \delta \varphi$$

$$\delta r, \delta \varphi \rightarrow 0$$

$$\sin \delta \varphi \approx \delta \varphi$$

$$\Rightarrow \frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{L}{2m} = \text{const}!$$

$$m r^2 \dot{\varphi} = L$$

2.7.2 Energieerhaltung und Bahnsgleichung

Lagrange-Gleichung 2. Art für r : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $m\ddot{r}$ $m r \dot{\varphi}^2 - V'(r)$

$$\Rightarrow m\ddot{r} - \underbrace{m r \dot{\varphi}^2}_{\text{Zentrifugalkraft}} + V'(r) = 0 \quad \left. \vphantom{\frac{d}{dt}} \right\} \dot{\varphi} = \frac{L}{m r^2}$$

$$\Rightarrow m\ddot{r} - \frac{L^2}{m r^3} + V'(r) = 0$$

$\uparrow$
 $\dot{\varphi} = \frac{L}{m r^2}$

$\downarrow \cdot r$

$$\underbrace{m r \ddot{r}}_{\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{r}^2 \right)} + \frac{L^2}{m} \underbrace{\left(-\frac{r^*}{r^3} \right)}_{\frac{d}{dt} \frac{1}{2r^2}} + \underbrace{\dot{r} V'(r)}_{\frac{d}{dt} V(r)}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2m r^2} + V(r) \right) = 0 \quad \int dt \quad E = T + V$$

$$\frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2m r^2} + V(r) = E = \text{const}$$

$$\frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{m r^2 \dot{\varphi}^2}{m r^2} \right) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) = T$$

Alternativ: $E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \tilde{V}(r)$ mit **effektivem Radialpotenzial**

$$\tilde{V}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2m r^2}$$

$$\Rightarrow \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - \tilde{V}(r))}$$

Trung der Variable $\int_{t_0}^{t_f} dt' = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - \tilde{V}(r'))}}$ $\Rightarrow t = t(r) \Rightarrow \text{Umkehrung: } r = r(t)$

$$\Rightarrow \varphi(t) \text{ aus } \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{m r^2(t)} \quad \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi' = \int_{t_0}^t dt' \frac{L}{m r^2(t')} \Rightarrow \varphi = \varphi(t)$$

Bohmungsgleichung: $r = r(\varphi)$, $\varphi = \varphi(r)$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{m r^2}{L} \sqrt{\frac{2}{m} (E - \tilde{V}(r))}$$

$$\int d\varphi = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2m}{L^2} (E - \tilde{V}(r))}} = \varphi - \varphi_0$$

2.7.3 Planetenbewegung & Kepler'sche Gesetze

Neu: Gravitationspotential: $V(r) = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r}$

$$\Rightarrow \tilde{V}(r) = -\frac{K}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}, \quad K = \gamma m_1 m_2 > 0$$

$$r \rightarrow 0: \tilde{V}(r) \sim \frac{L^2}{2mr^2} \rightarrow \infty$$

$$r \rightarrow \infty: \tilde{V}(r) \sim -\frac{K}{r} \rightarrow 0$$

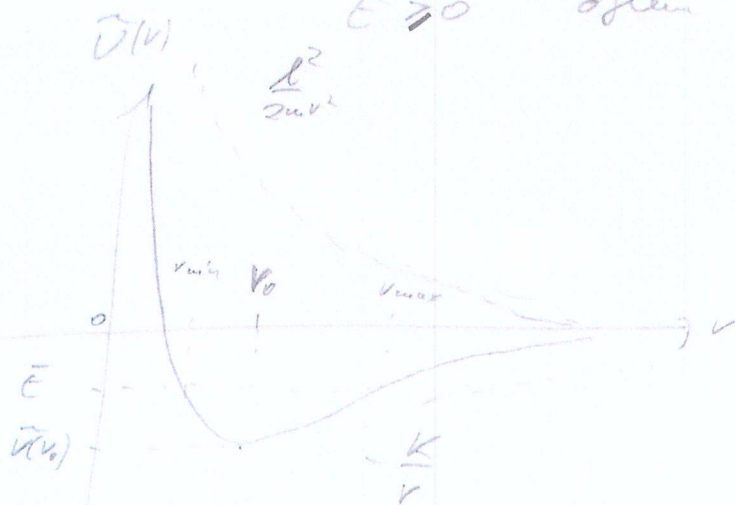
$$\text{Minimum: } \frac{d\tilde{V}}{dr} = \frac{K}{r^2} - \frac{L^2}{mr^3} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow r_0 = \frac{L^2}{mK} \Rightarrow \tilde{V}(r_0) = -\frac{mK^2}{2L^2}$$

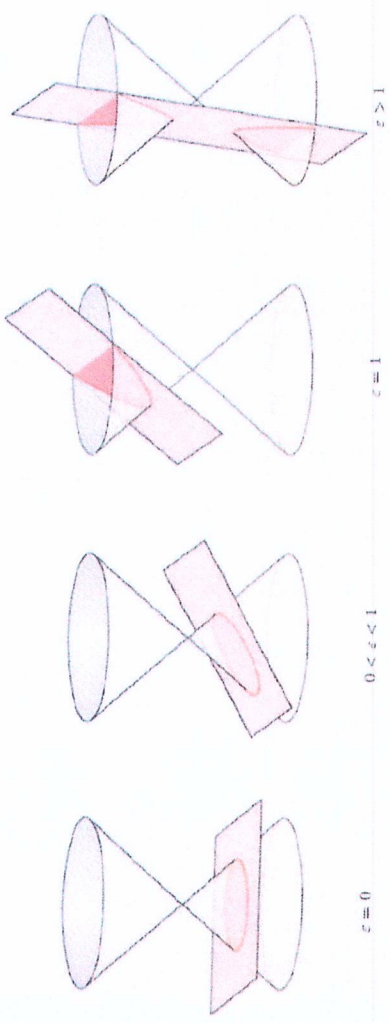
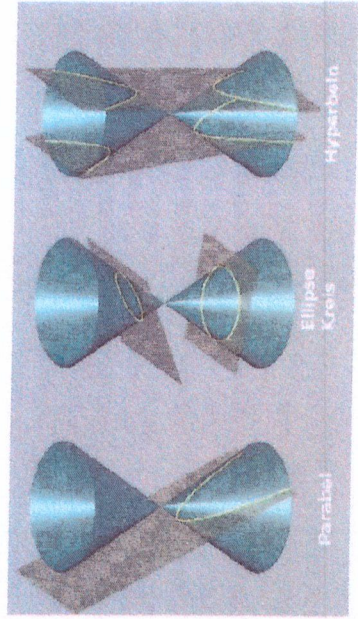
Wegen $\frac{m}{2} \dot{r}^2 = E - \tilde{V}(r)$ ist Bewegung nur für $\tilde{V}(r) < E$ möglich

$$\Rightarrow -\frac{mK^2}{2L^2} < E < 0 \quad \text{geschlossene Bahn (Ellipse)}$$

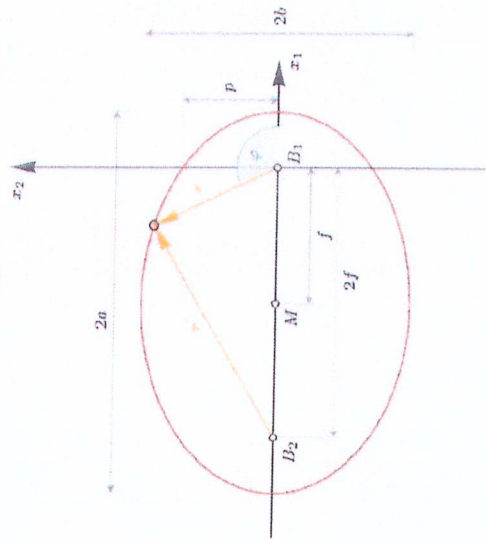
$$E \geq 0 \quad \text{offene Bahn (Hyperbel, Parabel)}$$

$$\underbrace{E > 0 \quad E = 0}_{\text{Keplerschnitte!}}$$

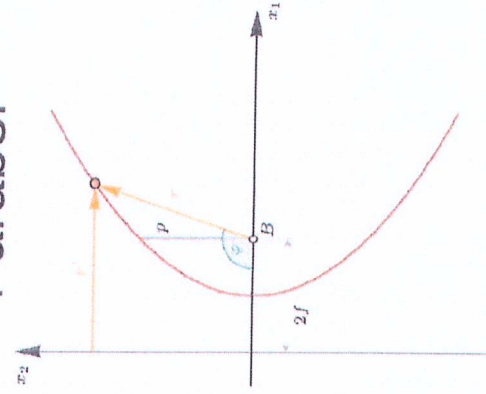




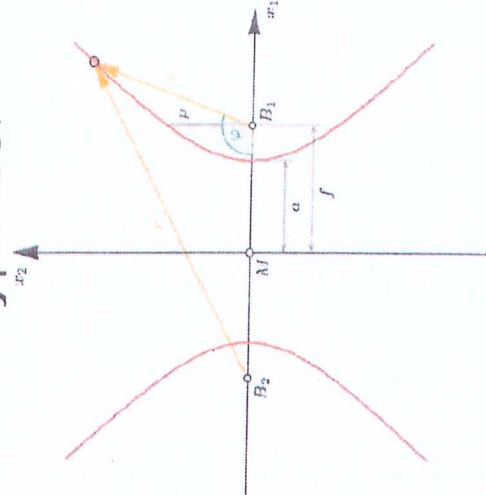
Ellipse



Parabel



Hyperbel



Für $-\frac{mk^2}{2\ell^2} < E < 0$ sind die Wendepunkte durch

$$\tilde{V}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2} = E \quad \text{bestimmt} \quad (E < 0)$$

$$\Rightarrow v_{\min/\max} = \frac{1}{2|E|} \left(k \pm \sqrt{k^2 - \frac{2\ell^2 |E|}{m}} \right)$$

$$\left[Er^2 + kr - \frac{\ell^2}{2m} = 0 \right.$$

$$r^2 - \frac{k}{|E|}r + \frac{\ell^2}{2m|E|} = 0$$

$$\hookrightarrow v_{\min/\max} = \frac{1}{2|E|} \left(k \pm \sqrt{k^2 - 4 \frac{\ell^2}{2m}} \right)$$

$$= \frac{1}{2|E|} \left(k \pm \sqrt{k^2 - \frac{2\ell^2 |E|}{m}} \right)$$

$$E > 0: \text{ nur 1 Wendepunkt: } v_{\min} = \frac{1}{2E} \left(\sqrt{k^2 - \frac{2\ell^2 E}{m}} - k \right)$$

$$\text{Bohrgleichung: } \varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{\frac{2m}{\ell^2} (E \tilde{V}(r'))}}$$

$$= \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{\frac{2m}{\ell^2} E + \frac{2mk}{\ell^2 r'} - \frac{1}{r'^2}}}$$

$$= \dots = \int_{r_0}^r d\vartheta \quad \text{mit} \quad \cos \vartheta = \frac{1}{\sqrt{D}} \left(\frac{1}{r} - \frac{mk}{\ell^2} \right)$$

Lösen des Integrals:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{\frac{2m}{l^2} (E - \tilde{V}(r'))}} = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{\frac{2m}{l^2} \left(E + \frac{k}{r'} - \frac{l^2}{2mr'^2} \right)}}$$

Benutze (i) quadratische Ergänzung und (ii) Substitution

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \frac{2m}{l^2} (E - \tilde{V}(r)) &= \frac{2mk}{l^2} + \frac{2mk}{l^2 r'} - \frac{1}{r'^2} = - \left(\frac{1}{r'} - \frac{mk}{l^2} \right)^2 + \frac{m^2 k^2}{l^4} + \frac{2mE}{l^2} \\ &= D - \left(\frac{1}{r'} - \frac{mk}{l^2} \right)^2 \quad \text{mit } D = \frac{2m}{l^2} \left(\frac{m k^2}{2 l^2} + E \right) > 0 \\ &= D \left[1 - \frac{1}{D} \left(\frac{1}{r'} - \frac{mk}{l^2} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\text{(ii) Substitution: } \cos \vartheta' = \frac{1}{\sqrt{D}} \left(\frac{1}{r'} - \frac{mk}{l^2} \right) \Rightarrow -\sin \vartheta' d\vartheta' = -\frac{dr'}{\sqrt{D} r'^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varphi - \varphi_0 &= \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2} \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{D} \left(\frac{1}{r'} - \frac{mk}{l^2} \right)^2}} = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta' \sin \vartheta' \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \vartheta'}} = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta' \\ &= \vartheta - \vartheta_0 = \arccos \left[\frac{1}{\sqrt{D}} \left(\frac{1}{r} - \frac{mk}{l^2} \right) \right] - \arccos \left[\frac{1}{\sqrt{D}} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{mk}{l^2} \right) \right] \end{aligned}$$

r_0, φ_0 Integrationskonstanten!

$$\text{denn: } \varphi_0 = \arccos \left[\frac{1}{\sqrt{D}} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{mk}{l^2} \right) \right] \Rightarrow \varphi(r) = \arccos \left[\frac{1}{\sqrt{D}} \left(\frac{1}{r} - \frac{mk}{l^2} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{r(\varphi)} &= \frac{mk}{l^2} + \sqrt{D} \cos \varphi = \frac{mk}{l^2} (1 + E \cos \varphi) \\ &= \sqrt{D} \frac{l^2}{mk} = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow r(\varphi) = \frac{\frac{l^2}{mk}}{1 + E \cos \varphi} \quad \begin{cases} E=0 & r(\varphi) = \frac{l^2}{mk} = \text{const} \Rightarrow \text{Kreis} \\ 0 < E < 1 & \text{Ellipse} \end{cases}$$

Kegelschnitt:

$$\epsilon > 1 \quad \hat{=} \quad \epsilon > 0 \quad \text{Hyperbol}$$

offen

$$r' - r = 2a$$

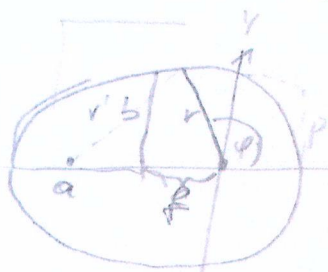
$$\epsilon = 1 \quad \hat{=} \quad \epsilon = 0 \quad \text{Parabel}$$

— " —

$$0 < \epsilon < 1 \quad \hat{=} \quad -\frac{mh^2}{2l^2} < \epsilon < 0 \quad \text{Ellipse}$$

geschlossen

$$r' + r = 2a$$



$$r' + r = 2a = \text{const.}$$

Minimum

$$\epsilon < 1: \cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+f)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ellipsengleichung

oder aus Ellipsengleichung

$$f = \sqrt{a^2 - b^2} \quad \text{Exzentrizität}$$

$$\epsilon = \frac{f}{a} \quad \text{Exzentrizität}$$

$$\begin{aligned} \text{Hauptachsen: } a &= \frac{l^2}{mh(1-\epsilon^2)} = \frac{k}{2|\epsilon|} \\ (1-\epsilon^2)a &= \frac{l^2}{mh} \\ \Rightarrow r(1+\epsilon) &= \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon \cos \varphi} \end{aligned}$$

$$b = \frac{l^2}{mh\sqrt{1-\epsilon^2}} = \frac{l}{\sqrt{2m|\epsilon|}}$$

$$\left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{b^2}{a} = \frac{l^2}{mh}$$

alternative Ellipsengleichung:

$$\frac{1}{r} = \frac{mh}{l^2} + \sqrt{D} \frac{x}{r} = \frac{mh}{l^2} \left(1 + \frac{\epsilon x}{r} \right)$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{mh}{l^2} \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{mh}{l^2} \epsilon x$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{l^2}{mh} - \epsilon x$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{l^2}{mh} \right)^2 - \frac{l^2 \epsilon x}{mh} + \epsilon^2 x^2$$

$$\Rightarrow y^2 = \left(\frac{l^2}{mh} \right)^2 - \frac{l^2 \epsilon}{mh} x + (\epsilon^2 - 1) x^2$$

3. Keplersches Gesetz

31

$$T^2 \sim a^3 \quad (T: \text{Umlaufzeit}, a: \text{große Halbachse})$$

Ellipse fläche $F = \pi a b$

mit $\frac{dF}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{const folgt: } F = \pi a b \int_0^T \frac{dF}{dt} dt = \frac{L}{2m} T$

$$\Rightarrow T = \frac{2m\pi ab}{L} \stackrel{\uparrow}{=} \frac{2m\pi a}{L} \frac{L}{\sqrt{1-e^2}} \sqrt{a} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{4}} a^{3/2}$$

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{1-e^2}{1} \Rightarrow b = \frac{L}{\sqrt{1-e^2}} \sqrt{a}$$

$$\Rightarrow T^2 \sim a^3$$

mit $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, $k = \gamma m_1 m_2$ folgt: $\frac{m}{L} = \frac{1}{\gamma(m_1 + m_2)}$

Für $m_1 (\text{Planet}) \ll m_2 (\text{Sonne}): \frac{m}{L} \approx \frac{1}{\gamma m_2} \Rightarrow T \approx 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\gamma m_2}}$

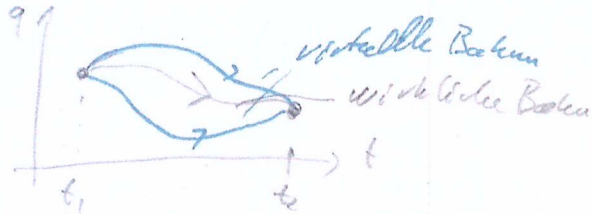
3. Das Hamiltonsche Prinzip

32

3.1 Variationsprinzip

Bisher: differenzierbare Variation $\delta r_i \rightarrow$ D'Alembertsches Prinzip

Nun: Variation der ganzen Bahn $\rightarrow$ **Hamiltonsches Prinzip**



Idee: Die wirklich ausgeführte Bahn zeichnet es aus, dass
sei eine konstante Größe („**Wirkung**“) extremalwertet.

Allgemein: Sei $I: C^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktional
 $q(t) \mapsto I[q] := \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$

Suche $q(t)$, so dass $\delta I[q] = 0$ (extremal!)

Anforderung für varierte Bahnen:

Zu jedem t aus $t_1 \leq t \leq t_2$ wird dem Punkt $q(t)$ auf der
realen Bahn ein variierter Bahnpunkt $q'(t)$ zugeordnet:

(i) $q'(t) \in C^2$ (2mal differenzierbar)

(ii) $\delta q(t) = q'(t) - q(t)$ differenzielle Variation

(iii) $\delta t = 0$

Zeit bleibt invariant

(iv) $q'(t_1) = q(t_1)$

$q'(t_2) = q(t_2)$

Aufgabs- / Punkte fest $\Rightarrow \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$
Ende

a) Extremum einer Funktion $f(x)$ einer Variable:

$$\delta f(x) = f(x+\delta x) - f(x) = \frac{df}{dx} \delta x \quad \delta x = 0 \quad \text{für beliebige } \delta x \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = 0 \quad \text{bei } x = x^* (\text{Extremum})$$

b) Extremum einer Funktion $f(x_1, \dots, x_N)$ mehrerer Variablen:

$$\delta f = f(x_1 + \delta x_1, \dots, x_N + \delta x_N) - f(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \quad \text{für bel. } \delta x_i$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad i=1, \dots, N \quad \text{bei } x_i = x_i^* (\text{Extremum})$$

c) Extremum eines **Funktional** $f[x] \equiv f[x(t)]$ ($= f(x(t))$)

$$x_1, \dots, x_N \rightarrow x(t)$$

$$x_i^* \rightarrow x^*(t)$$

$$\delta x_1, \dots, \delta x_N \rightarrow \delta x(t)$$

$$\delta f = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i \rightarrow \delta f = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta f}{\delta x(t)} \delta x(t) dt$$

Funktional ableitung

$$\hookrightarrow f[x] = \int_{t_1}^{t_2} dt \, F(x(t))$$

$$\Rightarrow \delta f = f[x(t) + \delta x(t)] - f[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ F(x(t) + \delta x(t)) - F(x(t)) \right\}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\frac{dF}{dx}}_{\frac{\delta f}{\delta x(t)}} \delta x(t) = 0 \quad \text{für beliebige } \delta x(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta f}{\delta x(t)} = \frac{dF}{dx} = 0 \quad \text{bei } x(t) = x^*(t) (\text{Extremum})$$

partielle Integration

$$\text{Bsp: } f[x, \dot{x}] = \int_{t_1}^{t_2} dt \, F(x(t), \dot{x}(t))$$

$$\Rightarrow \delta f = \int_{t_1}^{t_2} dt \, \delta F(x(t), \dot{x}(t)) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right\} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right\} \delta x(t)$$

$$\Rightarrow \text{Extremum: } \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (\text{Euler-Lagrange-Gleichung für } x(t))$$

Auswerten auf $q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)$:

$$0 = \delta I[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \, \delta \bar{T}(q, \dot{q}, t) \stackrel{(iv)}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \, \delta \bar{T}(q, \dot{q}, t) \stackrel{(iii)}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right]$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{\partial \bar{T}}{\partial q} \delta q + \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}$$

$$\stackrel{\text{partielle Int.}}{=} \left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q$$

= 0

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial \bar{T}}{\partial q} - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}} \right) \right\} \delta q$$

frei variieren

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{T}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}} = 0$$

Fazit: Differenzialgleichung ist äquivalent zum Integralprinzip $\delta I[q] = 0$

3.2 Hamiltonsches Wirksprinzip

Annahmen:

(i) Holonom Zwangsbedingungen $\rightarrow$ generalisierte Koord. $q_1, \dots, q_f$

(ii) Konserватive Kräfte $\rightarrow$ Lagrange-Funktion $L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) = T - V$

Idee: (a) $T = L$ (b) Verallgemeinerung auf vektorielle Variablen $x \rightarrow q_1, \dots, q_f$
 $\dot{x} \rightarrow \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f$

$\Rightarrow$ Euler-Lagrange-DGL $\hat{=}$ Lagrange-Gleichung 2. Art

Integralprinzip $\delta I = 0 \quad \hat{=}$ Hamiltonsches Wirksprinzip $\delta W = 0$

Wirkungsfunktional $W = \int_{t_1}^{t_2} dt \, L(q_1(t), \dots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_f(t), t)$

Berechnung:

$$0 = \int W = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^f \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \dot{q}_k(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} \dot{q}_k(t) \right\}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^f \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right\} \dot{q}_k(t)$$

Für beliebige Variationen $\delta q_k(t)$, $k=1, \dots, f$ folgt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$$

Bsp: 1-dimensionaler harmonischer Oszillator

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} \int W = \int_{t_1}^{t_2} dt \int \left\{ \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \right\}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ m \dot{q} \delta \dot{q} - m \omega^2 q \delta q \right\}$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{partielle} \\ \text{Int.}}}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ -m \ddot{q} - m \omega^2 q \right\} \delta q$$

$$\Rightarrow \ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

Bem.: • Integralprinzip (betrifft ganze Bahn)

• **teleologisch**: auf ein Ziel gerichtet

• unabhängig von Koordinatenwahl

$$\bullet [Wirkung] = \underbrace{[Energie]}_{\frac{kg}{s^2}} \times \underbrace{[Zeit]}_s = \underbrace{[Impuls]}_{\frac{kg}{s}} \times \underbrace{[a.s.]}_m$$

Vgl. Plancks Wirkungsquantum $[h] = Js$ ($h = 6,626 \cdot 10^{-34} Js$)
 $(\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,055 \cdot 10^{-34} Js)$

3.3 Eichtransformationen

36

Lagrange-Funktion nicht eindeutig durch Lagrange-Gleichung festgelegt.

Satz: Die Eichtransformationen $L \mapsto L' = L + \frac{d}{dt} M(q, t)$ mit beliebiger
Eichfunktion M löst die Lagrange-Gleichung invariant,

Folgerung: $\delta \int L' dt = 0 \Leftrightarrow \delta \int L dt = 0$

Beweis: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} M(q, t) \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{d}{dt} M(q, t) \right)$

mit $\frac{d}{dt} M(q, t) = \sum_{l=1}^f \frac{\partial M}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial M}{\partial t}$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q_k} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{l=1}^f \frac{\partial M}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial M}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{d}{dt} M(q, t) \right) \\ &= \frac{\partial M}{\partial q_k} \quad (\text{Klammer nicht von } \dot{q}_k \text{ abhängig}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Bsp: 1D harmonischer Oszillator:

$$L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{m}{2} \omega^2 q^2 \quad \text{und} \quad M(q) = \frac{m}{2} \omega^2 q^2 \Rightarrow \frac{d}{dt} M = m \omega^2 q \dot{q}$$

$$\Rightarrow L' = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{m}{2} \omega^2 (q^2 - 2q\dot{q})$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q} = m \ddot{q} + m \omega^2 \dot{q} - (-m \omega^2 q + m \omega^2 \dot{q}) \Rightarrow \ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

4. Das Hamiltonsche kanonische Formalismus

- §.1 Legendre-Transform
- §.2 Die Hamiltonschen Gleichungen
- §.3 Symplektische Strukturen des Phasenraums
- (§.4 Der Liouville'sche Satz)
- (§.5 Poincaré-Kleene)

Idee: Lagrange-Theorie: generalisierte Koordinaten $q_1, \dots, q_f$
und Geschwindigkeiten $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f$

$$\Rightarrow L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k=1, \dots, f$$

f Dgls 2. Ordnung

Hamilton-Formalismus: $(q_k, \dot{q}_k, t) \rightarrow (q_k, p_k, t)$

$$H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t) \Rightarrow \dots \Rightarrow \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

2f Dgls 1. Ordnung

§.1 Legendre-Transformation

Idee: Für $y = f(x)$ soll statt x die Variable $\frac{df}{dx} = u$ verwendet werden
 $f'(u)$

Annahme: $\frac{df}{dx} = u$ umkehrbar (für $x = \varphi(u)$) $\Rightarrow \frac{d^2 f}{dx^2} \neq 0$

Achtung: $y = f(x) + a$ liefert auch dieselbe Steigung $\frac{df}{dx}$!

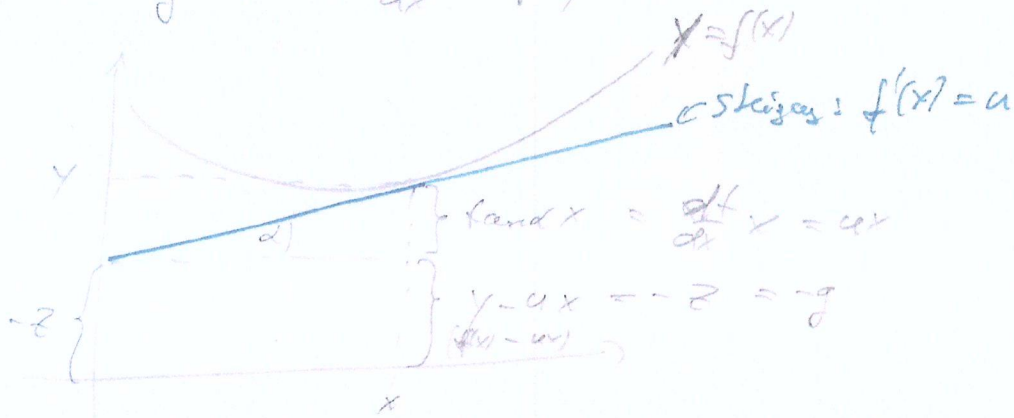


$\Rightarrow$ Legendre-Transform

$$x \rightarrow u = \frac{df}{dx}$$

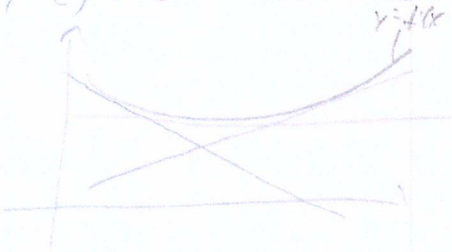
$$y \rightarrow z = x u - \underbrace{f(x)}_y = \varphi(u) u - f(\varphi(u)) \equiv g(u)$$

$$\Rightarrow g(u) = x \frac{df}{dx} - f(x)$$



Also: statt $y=f(x)$: Trafo $x \rightarrow u = \frac{df}{dx}$ und (negativer) Achsenabschnitt des Tangents ($-z$)

$(u, -z)$ bestimmen die Scheit der Enthalpien



Analog auf $L(q, \dot{q}, t)$:

$$y=L, \quad x=\dot{q}, \quad u=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=p \Rightarrow z=\dot{q}p-L=H(q, p, t)$$

(ii) $L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \Rightarrow H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t) = \sum_{j=1}^f \dot{q}_j p_j - L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$$

(da $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_j} \neq 0$, lässt $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ nach $\dot{q}_k$ auflösen)

4.2 Die Hamilton'schen Gleichungen

39

Ziel: Bewegungsgleichungen für $q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f$:

$$H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t) = \sum_{j=1}^f \dot{q}_j p_j - L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$$

totaler Differential

$$\Rightarrow dH = \sum_{j=1}^f \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \right\} + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (\text{linke Seite})$$

$$= \sum_{j=1}^f \left\{ \underbrace{\dot{q}_j}_{p_j} dq_j + p_j d\dot{q}_j - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j}_{-dL} - \frac{\partial L}{\partial t} dt \right\} \quad (\text{rechte Seite})$$

Vergleich LS mit RS liefert:

$$dq_j: \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$dp_j: \frac{\partial H}{\partial p_j} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{d}{dt} p_j = \dot{p}$$

$$dt: \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

Hamilton'sche Gleichungen

Bei zeitlicher Trennung (keine Zwangsbedingungen) (Allgemeine Zwangsbedingungen:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(q_1, \dots, q_f) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0)$$

$$\sum_{j=1}^f \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T \Rightarrow H = \sum_{j=1}^f \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = 2T - (T - V) = T + V$$

$$\Rightarrow H = T + V \quad \text{Gesamtenergie}$$

$\Rightarrow$ Energieerhaltung: $\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^f \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j \right\} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0$

$$\underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j}_{\frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j} + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j}_{-\frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

$$= 0$$

• allgemeine Zwangsbedingungen: $H \neq T + V$

Auswahlschema:

Kochrezept der Hamiltonschen Gleichungen:

1. Auswählen generalisierter Koordinaten: $q_1, \dots, q_f$
2. Transformation $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_f, t)$ und $\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_i(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$
3. Berechnen der Lagrange-Funktion $L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$
4. Berechnen der generalisierten Impulse $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$
und deren Umkehrung $\dot{q}_j = \dot{q}_j(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t)$
5. Legendre-Transformation $H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t) = \sum_{j=1}^f \dot{q}_j p_j - L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$
6. Aufstellung der Bewegungsgleichungen ($j = 1, \dots, f$):

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad \text{und} \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

7. Lösen der Bewegungsgleichungen

Bsp. a) 1 Teilchen im 3D-Kartesischen Koordinatensystem oder Zweifelsfrei:

(i) $\varphi_1 = r, \varphi_2 = \varphi, \varphi_3 = z$

(ii) $x = r \cos \varphi, \quad \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi$
 $y = r \sin \varphi, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi$
 $z = z, \quad \dot{z} = \dot{z}$

(iii) $T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2), \quad V = V(r, \varphi, z)$

$$\Rightarrow L(r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}) = T - V$$

(iv) $p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m}$ Radialimpuls

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m r^2} \quad z\text{-Komponente des Drehimpulses } (L_z)$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \frac{p_z}{m} \quad z\text{-Komponente des Impulses}$$

$$IV) H = p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi} + p_z \dot{z} - L = \frac{1}{m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2 \right) - \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2 \right) + V(r, \varphi, z)$$

$$= \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2 \right) + V(r, \varphi, z)$$

(vi) $\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \left(\frac{p_\varphi^2}{m r^3} - \frac{\partial V}{\partial r} \right)$ Radialpotential:
 $\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{m r^2}, \quad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}$
 $\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}, \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z}$
 $p_r = 0 \Rightarrow \dot{r} = 0$

$$\dot{p}_\varphi = 0 \Rightarrow \dot{p}_\varphi = m \rho^2 \dot{\varphi} = \text{const} \quad \text{Drehimpuls erhalten}$$

47

$$\dot{p}_z = 0 \Rightarrow p_z = \text{const} = 0 \quad (\text{ohne Bewegung})$$

(b) 1D harmonischer Oszillator

$$\text{ii) - (iii)} \quad L = \frac{m}{2} (\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)$$

$$\text{iv)} \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q}$$

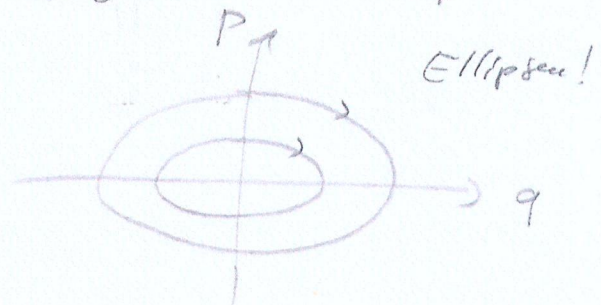
$$\text{v)} \quad H = p \dot{q} - L = \frac{p^2}{m} - \frac{m}{2} \left(\frac{p^2}{m^2} - \omega^2 q^2 \right) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 q^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 : \text{skleronomes System} \Rightarrow E = H = T + V = \text{const}$$

$$\Rightarrow \frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{\frac{2E}{m\omega^2}} = 1$$

Kreisbachform:

$$a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}, \quad b = \sqrt{2mE}$$



$$\text{vi)} \quad \left. \begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \end{aligned} \right\} \text{definiert Richtung in } (q, p)\text{-Ebene}$$

5 Mechanik des starren Körpers

49

Idee: ausgedehnte, starre Körper (vgl. deformierbare Medien)
Elastomechanik / Hydrodynamik

↳ Def: Starrkörper:

(a) System von N Masspunkten mit festen Abständen
(↳ Zwangsbedingungen) $M = \sum_{i=1}^N m_i$

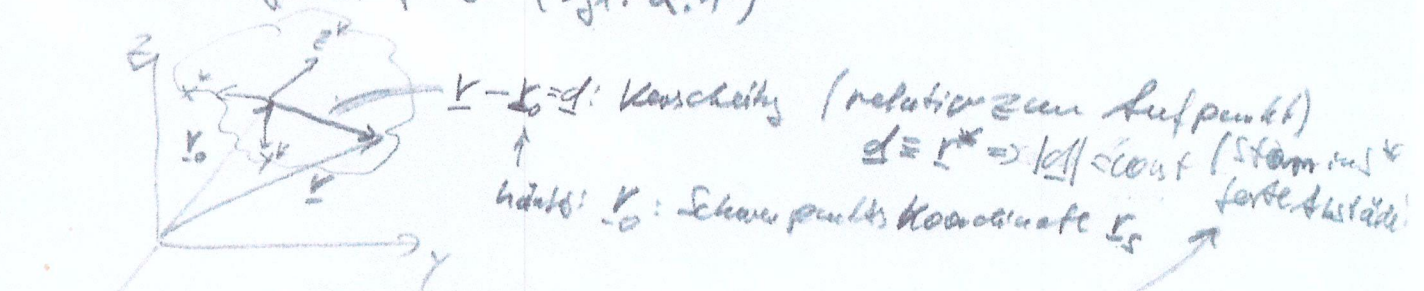
(b) vorgegeben, kontinuierliche Massenverfölg: $\rho(\mathbf{r})$,
(↳ Gesamtmasse: $M = \int \rho(\mathbf{r}) d^3r$)

Beschreibung: (i) **Raumfests Koordinatensystem** $S: (x, y, z), (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$
↳ Inertialsystem $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

(ii) **Körperfests Koordinatensystem** $S^*: (x^*, y^*, z^*), (\mathbf{e}_x^*, \mathbf{e}_y^*, \mathbf{e}_z^*)$
↳ Rotationsachse / Kein Inertialsystem $(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*)$
↳ Ursprung: **Schwerpunkt** (kann gewählt sein)
(kann auch beliebiger Bezugspunkt sein)

(iii) **Schwerpunktsystem** $S': (x', y', z'), (\mathbf{e}_x', \mathbf{e}_y', \mathbf{e}_z')$
↳ translationale von S (gleiche Richtung)
($\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$)

Freiheitsgrade: $f=6$ (vgl. 2.1)



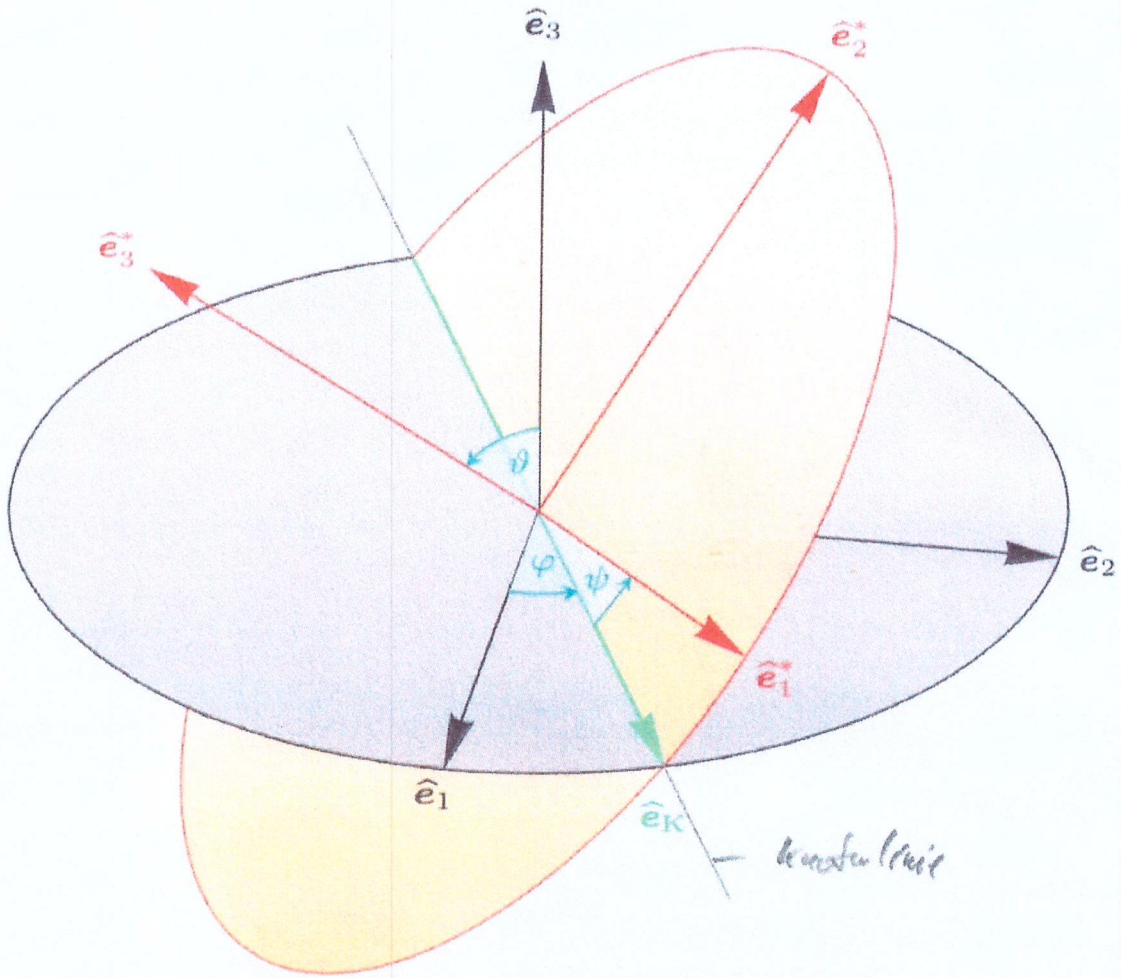
$$\Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{d} \quad |\mathbf{d}| = \text{const} \text{ und Orientierung!}$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{d}} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}}$$

Schwerpunktsgeschw. Rotation um Drehachse
Aufpunkt gegeben durch $\boldsymbol{\omega}$

42

Eckert'scher Winkel: zur Beschreibung einer beliebigen Drehung $S' \rightarrow S^*$



4: Wahl zwischen $\underline{c}_1$ und $\underline{c}_4$

g: Wahl zwischen $\underline{L}_3$ und $\underline{L}_3^*$

$$\varphi: \text{---} \rightarrow \text{---} \quad \underline{e}_1^* \text{ und } \underline{e}_k$$

$\Rightarrow$ (i) Drehung um φ (z-Achse, $\underline{e}_3$)

(ii) Drehung um z (Knotenlinie, $\ell^{(1)}_z$)

$$P_{\text{Zurück}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

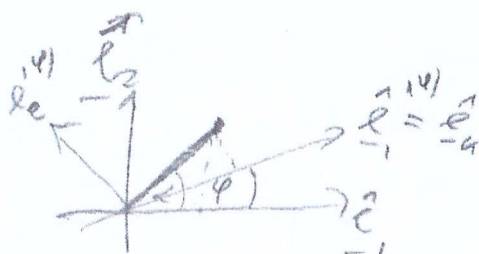
24th

$\Rightarrow$ Basis system: $\underbrace{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n}_{= e_k}$ ^(rep)

$$R_1(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{reset} & \text{send} \\ 0 & \text{start} & \text{reset} \end{pmatrix}$$

X-faktor
in 42314

$\Rightarrow$ Basis system: $\begin{matrix} (v) \\ e_1 \end{matrix}, \begin{matrix} (v) \\ e_2 \end{matrix}, \begin{matrix} (v) \\ e_3 \end{matrix}$



Drehung um φ (z-Achse)

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \alpha \\ x_2 &= r \sin \alpha \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1' &= r \cos(\alpha - \varphi) = r (\cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi) \\ x_2' &= r \sin(\alpha - \varphi) = r (\sin \alpha \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_1' &= x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi \\ x_2' &= -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

(iii) Drehung um φ ($\underline{e}_3^* = \underline{e}_3^{(\varphi)}$)

44

$$\underline{R}_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

↑
Z-Achse
im d-System

$\Rightarrow$ Kombiniert: $\underline{R} = \underline{R}_3(\varphi) \underline{R}_1(\vartheta) \underline{R}_2(\varphi)$

$\Rightarrow$ Anzeigewinkel auf d in S nach d^* in S^* : $\underline{d}^* = \underline{R} \underline{d}$, ($\underline{r}^* = \underline{R} \underline{r}$)

↑ ↑
Körperachse reelles Lot

Achtung: vom $\underline{d}^*$ in S^* nach $\underline{d}$ in S : $\varphi \rightarrow -\varphi$

($\underline{d} = \underline{R}^T \underline{d}^*$, $\underline{r} = \underline{R}^T \underline{r}^*$) $\vartheta \rightarrow -\vartheta$ $\varphi \rightarrow -\varphi$ } $\sin(\alpha) = \sin(-\alpha)$

$\Rightarrow \underline{R}_3(\varphi)^{-1} = \underline{R}_3(\varphi)^T = \underline{R}_3(-\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

analog: $\underline{R}_1(\vartheta)^{-1} = \underline{R}_1(\vartheta)^T = \underline{R}_1(\vartheta)$

5.1 Kinetische Energie & Trägheitstensor

45

(a) System von N Massenpunkten: Wähle: $r_0 = r_s$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\underline{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\underline{r}_0 + \underline{d}^{(i)} \right) \right]^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left[\dot{\underline{r}}_0 + \underline{\omega} \times \underline{d}_i^{(i)} \right]^2$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\underline{r}}_0^2}_M + \underbrace{\frac{2}{2} \dot{\underline{r}}_0 \cdot \sum_{i=1}^N m_i (\underline{\omega} \times \underline{d}_i^{(i)})}_{(\underline{r}_0 \times \underline{\omega}) \cdot \sum_{i=1}^N m_i \underline{d}_i^{(i)}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\underline{\omega} \times \underline{d}_i^{(i)})^2}_{\text{Rotationsenergie}}$$

Schwerpunkts-
energie

= 0 weil Schwerpunkt
im Ursprung von Σ^*

Nebenbed.: $(\underline{\omega} \times \underline{d})^2 = \omega^2 d^2 \sin^2 \alpha = \omega^2 d^2 (1 - \cos^2 \alpha)$
(skip (i))

$$= \omega^2 d^2 - \omega^2 d^2 \cos^2 \alpha$$

$$= \omega^2 d^2 - (\underline{\omega} \cdot \underline{d})^2 = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) - (\omega_1 d_1 + \omega_2 d_2 + \omega_3 d_3)^2$$

$$= \sum_{j,k=1}^3 \omega_j (d_j^2 \delta_{jk} - d_j d_k) \omega_k$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} M \dot{\underline{r}}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \omega_j \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i (d_j^{(i)2} \delta_{jk} - d_j^{(i)} d_k^{(i)})}_{\Theta_{jk}} \omega_k$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{\underline{r}}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \omega_j \Theta_{jk} \omega_k$$

Trägheitstensor

$$= \frac{1}{2} M \dot{\underline{r}}_0^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \underline{\Theta} \underline{\omega}$$

$$= T_{\text{Translation}} + T_{\text{Rotation}}$$

$\uparrow$
in Σ' System

(b) analog Hermitesche (Kartesisch):

46

$$T = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\underline{r}) (\dot{\underline{r}} + \underline{\omega} \times \underline{r})^2$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\int d^3r \rho(\underline{r})}_{M} \dot{\underline{r}}^2 + (\underline{r}_S \times \underline{\omega}) \cdot \underbrace{\int d^3r \rho(\underline{r}) \underline{r}}_{=0} + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \omega_j \Theta_{jk} \omega_k$$

mit $\Theta_{jk} = \int d^3r \rho(\underline{r}) [\underline{r}^2 \delta_{jk} - r_j r_k]$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} M \dot{\underline{r}}^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \underline{\Theta} \underline{\omega}$$

5.2 Eigenschaften des Trägheitstensors

$$\Theta_{jk} = \sum_{i=1}^N m_i (\underline{r}^{(i)2} \delta_{jk} - r_j^{(i)} r_k^{(i)})$$

$$\Rightarrow \underline{\Theta} = \sum_{i=1}^N m_i \begin{pmatrix} d_2^{(i)2} + d_3^{(i)2} & -d_1^{(i)} d_2^{(i)} & -d_1^{(i)} d_3^{(i)} \\ -d_2^{(i)} d_1^{(i)} & d_1^{(i)2} + d_3^{(i)2} & -d_2^{(i)} d_3^{(i)} \\ d_3^{(i)} d_1^{(i)} & -d_3^{(i)} d_2^{(i)} & d_1^{(i)2} + d_2^{(i)2} \end{pmatrix}$$

analog: $\underline{r} = (x_1, x_2, x_3)$

$$\underline{\Theta} = \int d^3r \rho(\underline{r}) \begin{pmatrix} x_2^2 + x_3^2 & -x_1 x_2 & -x_1 x_3 \\ -x_2 x_1 & x_1^2 + x_3^2 & -x_2 x_3 \\ -x_3 x_1 & -x_3 x_2 & x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix}$$

Klusterprüfung für TPI & für Lehramt

$\underline{\underline{\Theta}}$ ist ein Tensor 2. Stufe

↳ Transformationsmatrix für Drehungen:

Koordinaten: $x_\mu \rightarrow x'_\mu = \sum_{\nu=1}^3 R_{\mu\nu} x_\nu$

Drehmatrix in $\mathbb{R}^3$ ($\underline{\underline{R}}^{-1} \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{I}}$
det $\underline{\underline{R}} = 1$)

$\Rightarrow \Theta_{\mu\nu} \rightarrow \Theta'_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{\sigma=1}^3 R_{\mu\lambda} R_{\nu\sigma} \Theta_{\lambda\sigma}$

Kompakt: $\underline{\underline{x}} \rightarrow \underline{\underline{x'}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{x}}$

$\underline{\underline{\Theta}} \rightarrow \underline{\underline{\Theta'}} = \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{\Theta}} \underline{\underline{R}}$ (Ähnlichkeitstransf.)

Bsp.: 1. Stufe (Vektor) $A'_\mu = \sum_{\lambda=1}^3 R_{\mu\lambda} A_\lambda$

2. Stufe (Matrix) $A'_{\mu\nu} = \sum_{\lambda,\sigma=1}^3 R_{\mu\lambda} R_{\nu\sigma} A_{\lambda\sigma}$

n. Stufe $A'_{\mu_1 \dots \mu_n} = \sum_{\lambda_1, \sigma_1, \dots, \lambda_n, \sigma_n=1}^3 R_{\mu_1 \lambda_1} R_{\mu_2 \sigma_1} \dots R_{\mu_n \sigma_n} A_{\lambda_1 \sigma_1 \dots \lambda_n \sigma_n}$

Trafo nachweis: $\Theta_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^n m_i \left[\left(\sum_{\alpha=1}^3 x_\alpha^{(i)2} \right) \delta_{\mu\nu} - x_\mu^{(i)} x_\nu^{(i)} \right] = \dots = \Theta'_{\mu\nu}$

mit $x'_\mu = \sum_{\lambda=1}^3 R_{\mu\lambda} x_\lambda \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^3 x_\alpha'^2 = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{\sigma=1}^3 R_{\alpha\lambda} R_{\alpha\sigma} x_\lambda x_\sigma$

$= \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{\sigma=1}^3 \underbrace{\sum_{\alpha=1}^3 R_{\alpha\lambda} R_{\alpha\sigma}}_{\delta_{\lambda\sigma}} x_\lambda x_\sigma$
 $= \sum_{\lambda=1}^3 x_\lambda^2 \quad (\text{Invariant})$

iii) $\sum_{\lambda,\sigma=1}^3 R_{\mu\lambda} R_{\nu\sigma} \delta_{\lambda\sigma} = \sum_{\lambda=1}^3 R_{\mu\lambda} R_{\nu\lambda}^T = \delta_{\mu\nu} \quad (\text{Invariant})$

$\Rightarrow \sum_{\lambda,\sigma} R_{\mu\lambda} R_{\nu\sigma} \Theta_{\lambda\sigma} = \sum_{i=1}^n m_i \sum_{\lambda,\sigma} R_{\mu\lambda} R_{\nu\sigma} (x_\lambda^{(i)2} \delta_{\lambda\sigma} - x_\lambda^{(i)} x_\sigma^{(i)})$
 $= \sum_{i=1}^n m_i (x_\mu^{(i)2} \delta_{\mu\nu} - x_\mu^{(i)} x_\nu^{(i)}) = \Theta'_{\mu\nu}$ Tensor ist invariant.

$\underline{\Theta}$ ist diagonalisierbar durch eine orthogonale
Transformation $\underline{R} \in SO(3)$ (spezielle orthogonale Gruppe in $\mathbb{R}^3$,
alle Drehungen)

$$\underline{\Theta}' = \underline{R}^T \underline{\Theta} \underline{R} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix} \quad \text{d.h. gedrehtes Koordinatensystem!} \\ (y_1, y_2, y_3)$$

in Richtung der Hauptträgheitsachsen

$$\underline{\Theta}' = \int d^3y \, \rho(y) \begin{pmatrix} y_1^2 + y_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & y_1^2 + y_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & y_1^2 + y_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Theta_i \geq 0, \quad i=1,2,3$$

Diagonalisierung $\Rightarrow$ Eigenwertproblem: $\underline{\Theta} \hat{\underline{w}}^{(i)} = \Theta_i \hat{\underline{w}}^{(i)}$
 $\uparrow$
Hauptachsenträgheitsmomente
 (dann ist $\underline{\Theta}$ diagonal)

$$\Leftrightarrow \det(\underline{\Theta} - \Theta_i \underline{1}) = 0$$

$\Rightarrow$ 3 reelle, positive (semi-)definite Eigenwerte Θ_i .

$\underline{\Theta}$ ist linear in $\rho(r)$: additiv beim Zusammensetzen 2er Körper

Θ_i Hauptträgheitsmomente

$$\Theta_1 \neq \Theta_2 \neq \Theta_3 \quad \text{ausgewuchteter Körper}$$

$$\Theta_1 = \Theta_2 \neq \Theta_3 \quad \text{Symmetrie des Körpers (Axialsymmetrie)}$$

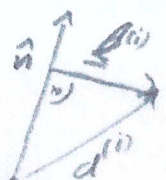
$$\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 \quad \text{"Kugelsymmetrie" (wählt man irgendwelche Achsen!)}$$

Trägheitsmoment

bzgl. Drehachse $\underline{w} = w \hat{n}$

$$\Theta_n = \sum_{i,j=1}^3 \hat{n}_i \Theta_{ij} \hat{n}_j = \hat{n}^T \underline{\Theta} \hat{n} = \sum_{i=1}^N m_i [\underline{d}^{(i)2} - (\underline{d}^{(i)} \cdot \hat{n})^2] \\ = \sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2$$

$$\Rightarrow T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \Theta_n \omega^2$$



Satz von Steiner:

Sei O_{μ} der Trägheitsfaktor im ebenen Schwerpunkt.

Zentriertes Körpersystem S , Sei S' die zu S achsenparallele, um a verschobenes System. Dann gilt:

$$\Theta' = \Theta_{\mu} + M(a^2 S_{\mu} - a_{\mu} a_{\nu})$$

(Trägheitsmoment bzgl. $\vec{n}$: $\Theta_n = \Theta_{\mu} + M d^2$, $d^2 = a^2 - (a \cdot \vec{n})^2$, $\Theta_n = \vec{n} \cdot \Theta \cdot \vec{n}$)

Beweis: Transformation $\underline{r} \rightarrow \underline{r}'$ mit $\underline{r}' = \underline{r} + \underline{a}$

Bsp.: Kugelsymmetrische Massenverteilung $\rho(r) = \rho(r)$

$$\Rightarrow \Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 =: \Theta$$

$$3\Theta = \sum_{i=1}^3 \Theta_i = \int dV \rho(r) \left[(x_2^2 + x_3^2) + (x_3^2 + x_1^2) + (x_1^2 + x_2^2) \right]$$

$$= 2 \cdot 4\pi \int_0^R dr r^4 \rho(r) \cdot 2r^2$$

$$\Rightarrow \Theta = \frac{8\pi}{3} \int_0^R dr r^4 \rho(r)$$

Für homogene Kernverteilung: $M = \underbrace{4\pi}_{V} R^3 \rho(r)$

$$\Theta = \frac{2}{R^3} M \int_0^R dr r^4 = \frac{2}{5} MR^2$$

(ii) Abrollende Kugel:

Θ bzgl. einem Drehachsendurch A :

$$\Theta_A = \Theta + MR^2$$

$$= \frac{2}{5} MR^2 + MR^2$$

$$= \frac{7}{5} MR^2$$



53 Drehimpuls & Bewegungsgleichungen

50

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \underline{L} &= \sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i \times \dot{\underline{r}}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\underline{r}_0 + \underline{d}^{(i)}) \times (\dot{\underline{r}}_0 + \underline{\omega} \times \underline{d}^{(i)}) \\
 &= \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i (\underline{r}_0 \times \dot{\underline{r}}_0)}_{\substack{M \\ \underline{L}_S \\ \text{"Bahndrehimpuls" \\ des Schwerpunkts}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \underline{d}^{(i)} \times \dot{\underline{r}}_0}_{=0 \text{ Schwerpunkt}} + \underline{r}_0 \times \left(\underline{\omega} \times \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \underline{d}^{(i)}}_{=0} \right) \\
 &\quad + \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \underline{d}^{(i)} \times (\underline{\omega} \times \underline{d}^{(i)})}_{\text{Relativdrehimpuls } \underline{L}_R \text{ (Eigendrehimpuls)}}
 \end{aligned}$$

$$(b) \quad \underline{L} = \underbrace{\underline{r}_0 \times M \dot{\underline{r}}_0}_{\substack{\underline{L}_S \\ \text{"Bahndrehimpuls" \\ des Schwerpunkts}}} + \underbrace{\int d^3r \, \rho(\underline{r}) \underline{d} \times (\underline{\omega} \times \underline{d})}_{\substack{\underline{L}_R \\ \text{relativ}}}$$

$$= \underline{L}_R = \int d^3r \, \rho(\underline{r}) \left[\underline{d}^2 \underline{\omega} - (\underline{d} \cdot \underline{\omega}) \underline{d} \right]$$

$$\Rightarrow \underline{L}_R = \underline{\Theta} \underline{\omega}$$

$$\text{Komponentenweise: } L_{R\mu} = \sum_{\nu=1}^3 \underbrace{\int d^3r \, \rho(\underline{r}) \left[\underline{d}^2 \delta_{\mu\nu} - d_\mu d_\nu \right]}_{\Theta_{\mu\nu}} \omega_\nu$$

$\Rightarrow$ im Allgemeinen $\underline{L}_R \nparallel \underline{\omega}$, $\underline{\omega}$ kann von $\underline{0}$ gedreht werden!

$\underline{L}_R \parallel \underline{\omega}$, wenn $\underline{\omega}$ in Richtung einer Hauptträgheitsachse liegt.

$$\underline{\Theta} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix}$$

Wähle Koordinatensystem im Schwerpunkt: $\underline{r}_0 = 0$

$$\Rightarrow \underline{L} = \sum_{i=1}^N m_i \underline{d}^{(i)} \times (\underline{\omega} \times \underline{d}^{(i)}) = \underline{L}_R$$

(Schwerpunkt: $\underline{r}_0 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \underline{d}^{(i)}$) $\Rightarrow M \underline{r}_0 = \sum_{i=1}^N m_i \underline{d}^{(i)}$

Newton'sche Gleichung für i -tes Teilchen: (vgl. 2.1)

$$m_i \underline{\ddot{d}}^{(i)} = \underbrace{\underline{F}^{(i) \text{ außen}}}_{\text{äußere Kräfte z.B. } m_i \underline{g}} + \underbrace{\sum_{j=1}^N \underline{F}^{(ij)}}_{\text{innere Kräfte}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \underline{\ddot{d}}^{(i)}}_{M \underline{\ddot{r}}_0} = \sum_{i=1}^N \underline{F}^{(i) \text{ außen}} + \sum_{i,j=1}^N \underline{F}^{(ij)}$$

actio = reactio ($\underline{F}^{(ij)} = -\underline{F}^{(ji)} \Rightarrow \underline{F}^{(ij)} + \underline{F}^{(ji)} = 0$) folgt:

Schwerpunktssatz: $M \underline{\ddot{r}}_0 = \sum_{i=1}^N \underline{F}^{(i) \text{ außen}} = \underline{F}^{(\text{außen})}$

Der Schwerpunkt bewegt sich so, als ob die gesamte Masse als starrer Körper in ihm versetzt wäre und alle Resultierende $\underline{F}^{(\text{außen})}$ aller äußeren Kräfte in ihm angreifen.

• innere Kräfte beeinflussen nicht die Schwerpunktsbewegung!

$$\sum_{i=1}^N m_i \underline{d}^{(i)} \times \underline{\ddot{d}}^{(i)} = \sum_{i=1}^N \underline{d}^{(i)} \times \underline{F}^{(i) \text{ außen}} + \underbrace{\sum_{i,j=1}^N \underline{d}^{(i)} \times \underline{F}^{(ij)}}_{=0}$$

$$\frac{d}{dt} \underline{L}$$

$$\underline{d}^{(i)} \times \underline{F}^{(ij)} + \underline{d}^{(j)} \times \underline{F}^{(ji)} \stackrel{\underline{F}^{(ji)} = -\underline{F}^{(ij)}}{=} (\underline{d}^{(i)} - \underline{d}^{(j)}) \times \underline{F}^{(ij)}$$

Anteilung Kräftegleichgewicht
zwischen i und $j \rightarrow \underline{d}^{(i)} - \underline{d}^{(j)}$

$$\Rightarrow \text{Drehimpulsatz: } \sum_{i=1}^N m_i \underline{\dot{d}}^{(i)} \times \underline{\ddot{d}}^{(i)} = \sum_{i=1}^N \underline{\dot{d}}^{(i)} \times \underline{\dot{d}}^{(i)} \text{ versch.}$$

§2

$$(\Rightarrow) \quad \frac{d}{dt} \underline{L} = \underline{M} \quad \text{Drehmoment}$$

(i) $\frac{d}{dt} \underline{L} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \underline{\dot{d}}^{(i)} \times (\underline{\omega} \times \underline{\dot{d}}^{(i)}) \right) \stackrel{\text{Komponenten}}{=} \frac{d}{dt} (L_i \underline{e}_i) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^3 \Theta_{ij} \omega_j \underline{e}_i \right)$

$$= \sum_{j=1}^3 \dot{\Theta}_{ij} \omega_j \underline{e}_i + \sum_{j=1}^3 \Theta_{ij} \dot{\omega}_j \underline{e}_i$$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^3 \dot{\Theta}_{ij} \omega_j \underline{e}_i}_{\substack{\text{Abh. f. } \dot{\omega} \text{ f. } \underline{e}_i \text{ konstant} \\ \text{bei Körperfesten System, } \underline{e}_i \text{ konstant}}} + \sum_{j=1}^3 \Theta_{ij} \omega_j (\underline{\omega} \times \underline{e}_i) \stackrel{\substack{\text{Körperfest} \\ \text{bleibt}}}{=} \frac{d}{dt} \underline{L} + \underline{\omega} \times \underline{L} = \underline{M}$$

(ii) alternative Transformations von Laborsystem auf Körperfestes System: ($\underline{r}_0 = 0$)

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{d}{dt} \right)^* + \underline{\omega} \times$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \underline{L} = \left(\frac{d}{dt} \right)^* \underline{L} + \underline{\omega} \times \underline{L} = \underline{M}$$

$$= \underbrace{\underline{\Theta} \dot{\underline{\omega}}}_{\substack{\uparrow \\ \text{festem Körperfesten System}}} + \underline{\omega} \times \underline{\Theta} \underline{\omega} = \underline{M}$$

$\Rightarrow$ Euler'sche Gleichungen: Körperfeste Achsen = Hauptachsenträgheitsachsen: $L_i = \Theta_i \omega_i$

$$\Theta_1 \dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2) \omega_2 \omega_3 = M_1$$

$$\Theta_2 \dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3) \omega_1 \omega_3 = M_2$$

$$\Theta_3 \dot{\omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1) \omega_1 \omega_2 = M_3$$

$$\underline{\omega} \times \underline{\Theta} \underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_2 \omega_3 \\ \omega_3 \omega_1 \\ \omega_1 \omega_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Theta_1 \omega_1 \\ \Theta_2 \omega_2 \\ \Theta_3 \omega_3 \end{pmatrix}$$

• nichtlinear, gekoppelt!

§4 Beispiele

BSP. 1) Symmetrischer Kegel: $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta \neq \Theta_3$ (Koeffizienten) $\hookrightarrow \kappa \neq 0$
im Körper der reellen Zahlen (Störungen der Symmetrie weggelassen)

13

$$\Rightarrow \Theta_3 \dot{\omega}_3 \neq (\Theta - \Theta_3) \omega_1 \omega_2 = 0 \Rightarrow \omega_3 = \text{const.}$$

$$\Theta_1 \dot{\omega}_1 = (\Theta - \Theta_3) \omega_2 \omega_3 \Rightarrow \dot{\omega}_1 = \frac{\Theta - \Theta_3}{\Theta} \omega_2 \omega_3$$

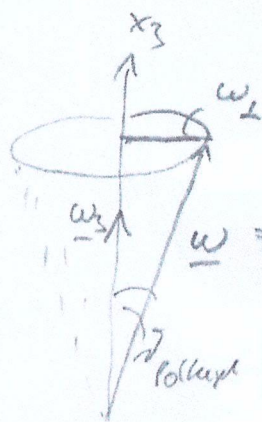
$$\Rightarrow \ddot{\omega}_1 = \frac{\Theta - \Theta_3}{\Theta} \omega_3 \dot{\omega}_2 = - \left(\frac{(\Theta - \Theta_3)^2}{\Theta} \omega_3^2 \right) \omega_1$$

$$\dot{\omega}_2 = - \frac{\Theta - \Theta_3}{\Theta} \omega_1 \omega_3$$

$$\Rightarrow \omega_1(t) = \omega_{\perp} \sin(\omega_0 t - \varphi_0) \text{ mit } \omega_0 = \frac{\Theta - \Theta_3}{\Theta} \omega_3$$

$$\omega_2(t) = -\omega_{\perp} \cos(\omega_0 t - \varphi_0), \quad \omega_3, \varphi_0 \text{ Integrationskonstanten}$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_{\perp}^2 = \text{const.}$$



$$\omega \Rightarrow \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = \omega_{\perp}^2 + \omega_3^2 \Rightarrow \varphi = \arctan \frac{\omega_{\perp}}{\omega_3}$$

$$\underline{\omega} \text{ und } \underline{L} \text{ (mit } L_j = \Theta_j \omega_j) \text{ rotieren um}$$

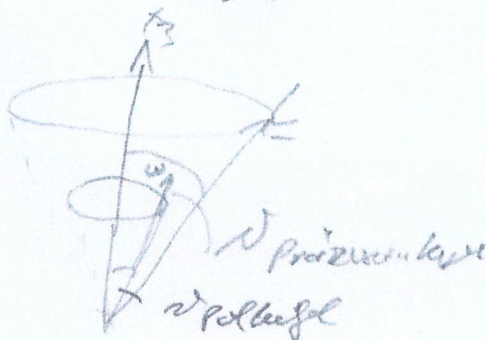
Flywheelachse

wegen $\Theta_3 \neq \Theta$ werden ω_1 und ω_2 auf verschiedenen Geraden gestreckt

$$L^2 = \Theta^2 \omega_{\perp}^2 + \Theta_3^2 \omega_3^2 (= L_{\perp}^2 + L_3^2)$$

$$\varphi_{\text{Präzessionswinkel}} = \arctan \frac{L_{\perp}}{L_3} = \arctan \frac{\Theta \omega_{\perp}}{\Theta_3 \omega_3} = \varphi \text{ (Euler-Winkel)}$$

id. $\varphi_{\text{Präzessionswinkel}} \neq \varphi_{\text{Kegel}}$



Bislang: Körper festes System: S^*

54

Nun: Raumfestes System: S

Euler-Winkel:
$$\begin{pmatrix} \omega_1^* \\ \omega_2^* \\ \omega_3^* \end{pmatrix} = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} \sin\varphi \sin\psi \\ \cos\varphi \sin\psi \\ \cos\psi \end{pmatrix} + \dot{\psi} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\chi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dot{\psi} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\chi} \begin{pmatrix} \sin\varphi \sin\psi \\ -\cos\varphi \sin\psi \\ \cos\psi \end{pmatrix}$$

Nun: $\dot{\chi} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \omega_1^* \\ \omega_2^* \\ \omega_3^* \end{pmatrix} = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} \sin\varphi \sin\psi \\ \cos\varphi \sin\psi \\ \cos\psi \end{pmatrix} + \dot{\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

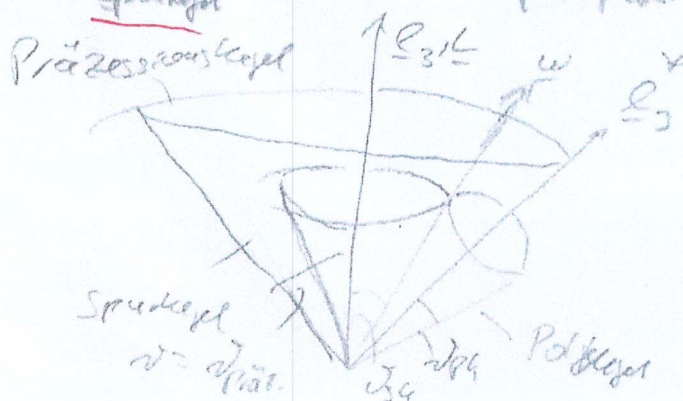
$$= \begin{pmatrix} \omega_3^* \sin(\psi) \\ \omega_3^* \cos(\psi) \\ \cos\psi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi = \psi \Rightarrow \varphi = \psi = \text{const}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega_1^*}{\sin\psi} = \cos\psi = \frac{\partial \omega_3^*}{\partial \cos\psi} = \dot{\psi} = \frac{L}{\theta}$$

$\Rightarrow$ Euler-Winkel: $\psi(t) = \psi_0$, $\varphi(t) = \psi_0 t + \varphi_0$, $\chi(t) = \psi_0 t + \varphi_0$

Spindelkegel: $\frac{\dot{\varphi} \sin\psi}{\dot{\psi} + \dot{\chi} \cos\psi} = \text{const}$ - auch $\frac{\dot{\psi} \sin\psi}{\dot{\psi} + \dot{\chi} \cos\psi}$



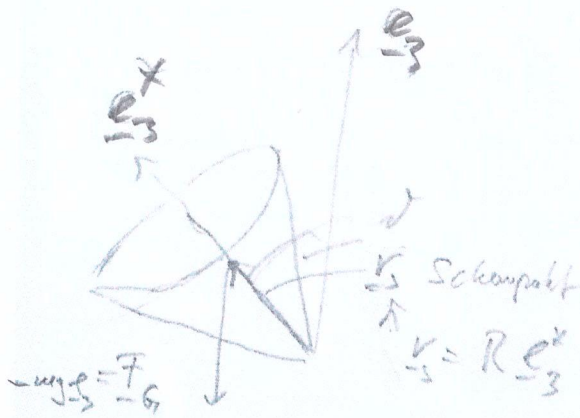
wenn der Drehimpuls genau konstant ist:

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial \psi} \approx \frac{1}{200}$$

in Realität: $\frac{1}{430}$ (Bezeichnen...)

2) Schauer, symmetrischer Kegel:

55



$$\underline{F}_G = -mg \underline{e}_3 \quad \text{größter Schwerpunkt}$$

$$\text{Drehmoment: } \underline{M} = \underline{r}_s \times \underline{F}$$

$$= -mg R \underline{e}_3^x \times \underline{e}_3$$

$$\Rightarrow \underline{M} \perp \text{Figurachse}$$

$$\text{Gesamtenergie: } E = T + V = \text{const}$$

$$V = mg \underline{e}_3 \cdot \underline{r}_s = mg R \underline{e}_3 \cdot \underline{e}_3^x = mg R \cos \vartheta$$

$$T = \frac{1}{2} \Theta (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} \Theta_3 \omega_3^2$$

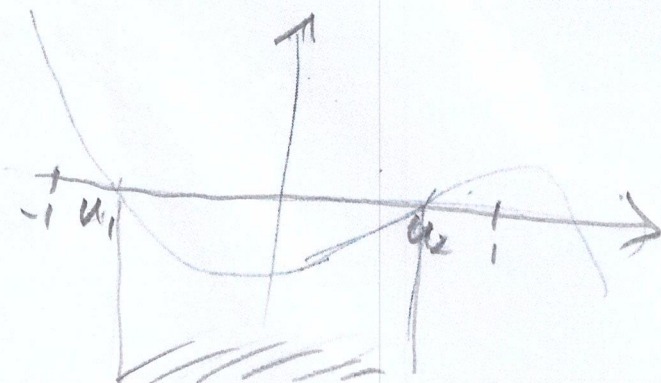
$$\Rightarrow E = \frac{\Theta}{2} (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{\Theta_3}{2} (\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \vartheta) + mg R \cos \vartheta = \text{const}$$

$$\hookrightarrow E = \frac{\Theta}{2} \dot{\vartheta}^2 + \frac{(L_3 - L_3^x \cos \vartheta)^2}{2 \Theta \sin^2 \vartheta} + \frac{L_3^{x2}}{2 \Theta_3} + mg R \cos \vartheta$$

$$\stackrel{E}{\hookrightarrow} \quad \dot{\vartheta}^2 + V_{\text{eff}}(\vartheta) = 0, \quad \dot{\vartheta} = \dot{\vartheta} \sin \vartheta$$

$$u = \cos \vartheta$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_{\text{eff}}(u) &= \frac{2}{\Theta} \left(\frac{L_3^{x2}}{2 \Theta_3} + mg R u - E \right) (1 - u^2) + \left(\frac{L_3 L_3^x u}{\Theta} \right)^2 \\ &= (C_1 + C_2 u) (1 - u^2) + (C_3 - C_4 u)^2 \end{aligned}$$



Bewegung Figurnachse $-1 < u_1 \leq \cos \vartheta \leq u_2 < 1$ (Neutration)

3) Koeffizienten konstant & selb. Vorzeichen

56

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$$

$$\dot{\omega}_1 = -\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1} \omega_2 \omega_3 = -\alpha_1 \omega_2 \omega_3$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_2} \omega_3 \omega_1 = \alpha_2 \omega_3 \omega_1$$

$$\dot{\omega}_3 = -\frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_3} \omega_1 \omega_2 = -\alpha_3 \omega_1 \omega_2$$

Fixpunkte: $\underline{\omega}^* = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$
 (Rotation um X- Y- Z-Achse)

Linearisierung: $\underline{f}(\underline{\omega}) = \underline{\omega} - \underline{\omega}^*$

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 \omega_3 & -\alpha_1 \omega_2 \\ \alpha_2 \omega_3 & 0 & \alpha_2 \omega_1 \\ -\alpha_3 \omega_2 & \alpha_3 \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte für:

$$\underline{\omega}^{*(1)} = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}: 0 = \det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \alpha_2 \omega \\ 0 & \alpha_3 \omega & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + \alpha_2 \alpha_3 \omega^2)$$

$$\Rightarrow \lambda_1^{(1)} = 0, \lambda_{2,3}^{(1)} = \pm i\omega\sqrt{\alpha_2 \alpha_3} \quad \text{Stabil / Zentrum}$$

$$\underline{\omega}^{*(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix}: 0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \alpha_2 \omega \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -\alpha_3 \omega & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - \alpha_1 \alpha_3 \omega^2)$$

$$\Rightarrow \lambda_1^{(2)} = 0, \lambda_{2,3}^{(2)} = \pm \omega\sqrt{\alpha_1 \alpha_3} \quad \text{Instabil (Sattelpunkt)}$$

$$\underline{\omega}^{*(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}: 0 = \begin{vmatrix} -\lambda & \alpha_1 \omega & 0 \\ \alpha_2 \omega & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + \alpha_1 \alpha_2 \omega^2)$$

$$\Rightarrow \lambda_1^{(3)} = 0, \lambda_{2,3}^{(3)} = \pm i\omega\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \quad \text{Stabil / Zentrum}$$

$\Rightarrow$ Dynamisches System