Teil II Elektrodynamik

Generell: Elektrodynamik beschreibt Wechselwirkungen geladener Teilchen.

Struktur: • einheitliche Beschreibung der elektrischen und und magnetischen Erscheinungen

- Feldtheorie (Kontinuumstheorie, Nahwirkungstheorie) beschreibt Wechselwirkungen durch Felder:

  $\underline{E}(\underline{r},t)$: elektrisches Feld

  $\underline{B}(\underline{r},t)$: magnetische Induktion

  welche den Maxwell-Gleichungen gehorchen (James Clerk Maxwell 1831-1879)

- lokale Theorie: WW der Ladung am Ort $\underline{r}$ nur mit Feldern am Ort $\underline{r}$ und nicht $\underline{r}'$

- lineare Theorie: Superpositionsprinzip

  $\underline{E}_1(\underline{r},t)$ & $\underline{E}_2(\underline{r},t)$ sind Lösungen der Maxwell-Gleichungen

  $\Rightarrow \underline{E}_1(\underline{r},t)+\underline{E}_2(\underline{r},t)$ ist Lösung ——— " ———

  ↳ Interferenz von Wellen

- relativistisch kovariant, d.h. Invarianz gegenüber Lorentz-Transformationen

  ↳ Wirkung breitet sich mit endlicher Geschwindigkeit aus.

1. Elektrostatik

- WW zweier Punktladungen: Coulomb-Gesetz

  (Charles Augustin de Coulomb 1736 - 1806)

- Kraft auf Ladung q_2 bei $\underline{r}$, ausgeübt von Ladung q_1 im Ursprung

$$\underline{F} = q_2 \, \underline{E}(\underline{r}) \quad \text{mit} \quad \underline{E}(\underline{r}) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\underline{r}}{r^3}$$

- Einheiten: $[q] = 1\,C = 1\,As$

  $\uparrow$ Coulomb $\quad \uparrow$ Ampere Sekunde

ε_0: Dielektrizitätskonstante $\left(8.854 \cdot 10^{-12} \frac{C}{Vm}\right)$ $VC = J = Nm = \frac{kg\,m^2}{s^2}$

- Test: $[F] = N = [q\underline{E}] = As \, \frac{As}{[\varepsilon_0]} \, \frac{m}{m^3} = \frac{A^2 s^2}{\frac{As}{Vm} m^2} = \frac{AsV}{m} = \frac{Nm}{m} = N$
- $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.9875 \cdot 10^{9} \, \frac{Vm}{C}$

  $\uparrow \frac{Nm^2}{C^2}$

- im Gauß-System (cgs): $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \overset{!}{=} 1$

- Warum Felder?

  ↳ Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von physikalischen WW ($\leq c$)

  $\Rightarrow$ Feld als Medium für die Übertragung der WW (Nahewirkung)

  ↳ Feld ist physikalischer Zustand des leeren Raumes bei $\underline{r}$

  ↳ Felddynamik (Maxwell-Gleichungen) zur Beschreibung endlich schneller Ausbreitung (Retardierungseffekte)

  ↳ Feld kann Energie, Impuls, Drehimpuls aufnehmen und abgeben.

- $\underline{E}$-Messung durch Einbringen einer Probeladung q_2

  mit ($q_2 \to 0$, keine Rückwirkung auf q_1): $\underline{E}(\underline{r}) = \lim\limits_{q_2 \to 0} \frac{1}{q_2} \underline{F}(\underline{r})$

- Elektrostatisches Potenzial

  Aus $\underline{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \underline{\nabla} r = -\frac{1}{r^3} \underline{r}$ folgt: Gradientenfeld

  $$\underline{E} = -\underline{\nabla} \phi(\underline{r}) \quad \text{mit} \quad \phi(\underline{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

  Einheit $[\phi] = \frac{Nm}{C} = V$ $\left(1\,\text{Volt} = 1 \frac{kg\,m^2}{C s^2}\right)$

  $\uparrow$

  (Alessandro Volta 1745 - 1827)

- Verallgemeinerung per Superpositionsprinzip (N Teilchen/Ladungen $q_1, \dots, q_N$)

  $$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{N} q_j \frac{\underline{r} - \underline{r}_j}{|\underline{r} - \underline{r}_j|^3}$$

- Übergang zu kontinuierlichen Ladungsverteilungen $dq = \rho(\underline{r}') d^3r'$

  mit Ladungsdichte $\rho(\underline{r}')$:

  $$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \, \rho(\underline{r}') \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}$$

  und

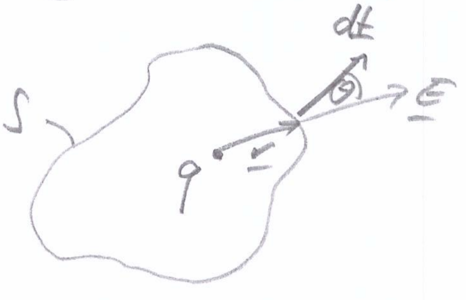
  $$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

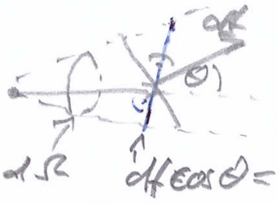
- Quellen des elektrischen Feldes:

Betrachte: Punktladung q bei $\underline{r}'=0$: $\underline{E}(\underline{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\underline{r}}{r^3}$

⇒ elektrischer Kraftfluss durch eine geschlossene Oberfläche S um q:

$$\oint_S d\underline{f}\cdot\underline{E}(\underline{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon}\int_S \frac{d\underline{f}\cdot\underline{r}}{r^3} = \ldots = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\underbrace{\oint_S \overset{\text{Raumwinkel}}{d\Omega}}_{4\pi} = \frac{q}{\epsilon_0}$$





⇒ $\boxed{d\underline{f}\cdot\underline{r} = df\, r\cos\theta = r^2 d\Omega}$

⇒ $\epsilon_0 \oint_S d\underline{f}\cdot\underline{E}(\underline{r}) = q$ oder $\epsilon_0 \oint_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{E}(\underline{r}) = \int_V d^3r'\,\rho(\underline{r}')$

Integralform des Coulombschen Gesetzes
(Gaußsches Gesetz)

- Gaußscher Integralsatz

$$\oint_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{E}(\underline{r}) = \int_V d^3r\,\mathrm{div}\,\underline{E}(\underline{r}) = \int_V d^3r\,\rho(\underline{r})$$

⇒ $\epsilon_0\,\mathrm{div}\,\underline{E}(\underline{r}) = \rho(\underline{r})$ differenzielle Form des Gaußschen Gesetzes

↳ Die elektrischen Ladungen sind die Quellen des elektrischen Feldes.

Elektrostatik:

(i) $\underline{E}(\underline{r})$ besitzt skalares Potential $\underline{E}(\underline{r}) = -\underline{\nabla}\phi(\underline{r})$

⇕

(ii) $\mathrm{rot}\,\underline{E} = 0$ statisches E-Feld ist wirbelfrei $(\underline{\nabla}\times\underline{\nabla}\phi = 0)$

⇕

(iii) $\int_1^2 \underline{E}\cdot d\underline{s}$ Weg unabhängig

Stokesscher Satz:
$$\oint_{\partial F} \underline{E}\,d\underline{s} = \int_F \mathrm{rot}\,\underline{E}\,d\underline{f}$$

- Arbeit im elektrischen Feld, um Ladung q von $\underline{r}_1$ nach $\underline{r}_2$ zu bringen:

$$W = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{s} = q \int_1^2 \underline{E}(\underline{r}) \cdot d\underline{s} = -q \int_1^2 d\underline{s} \cdot \underline{\nabla}\phi = -q \int_1^2 d\phi$$

$$= q\left(\phi(\underline{r}_1) - \phi(\underline{r}_2)\right) \quad : \text{Potenzialdifferenz}$$

$$\parallel$$

elektrische Spannung

- $\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi(\underline{r})$ eingesetzt in $\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = \operatorname{div} \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \underline{\nabla} \cdot (-\underline{\nabla}\phi(\underline{r})) = -\Delta\phi(\underline{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{r})$$ Poisson-Gleichung

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ Laplace-Operator

$\Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$ wird erst durch Randbedingungen eindeutig:

(i) $\phi(\underline{r}) \to 0$ hinreichend rasch für $|\underline{r}| \to \infty$

oder

(ii) $\phi(\underline{r})$ gegeben auf Flächen im Endlichen (Leiteroberflächen)

Lösung zu (i): $$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

$$\Rightarrow \Delta\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \rho(\underline{r}') \, \Delta_r \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$ (Singularität bei $\underline{r} = \underline{r}'$)

a) $\underline{r} \neq \underline{r}'$:

$$\Delta_r \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = \underline{\nabla}_r \cdot \underline{\nabla}_r \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = -\underline{\nabla}_r \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}$$

$$= -\frac{\underline{\nabla} \cdot (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} - (\underline{r} - \underline{r}') \, \underline{\nabla}_r \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}$$

$$= -\frac{\underset{\underset{\underline{\nabla}_r \cdot \underline{r} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 3}{\uparrow}}{3}}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} - (\underline{r} - \underline{r}') \cdot \underbrace{\frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|}}_{\underline{\nabla}_r |\underline{r} - \underline{r}'|} \frac{(-3)}{|\underline{r} - \underline{r}'|^4} = 0$$

b) $$\int_V d^3r' \, \Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \int_V d^3r' \, \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gauß}}}{=} \int_{\partial V} d\underline{f}' \cdot \underline{\nabla}_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$= - \int_{\partial V} d\underline{f} \cdot \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

$$= - \oint d\Omega$$

$$= \begin{cases} -4\pi & \text{für } \underline{r}' \in V \\ 0 & \text{für } \underline{r}' \notin V \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = -4\pi \underset{\uparrow}{\delta(\underline{r}-\underline{r}')}$$

Diracsche δ-Funktion (Distribution)

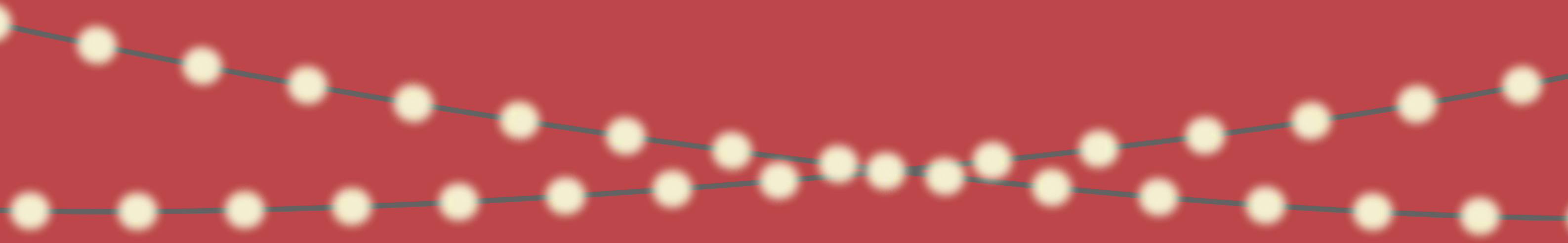
$$\left\lceil \int_V d^3r \, \delta(\underline{r}-\underline{r}') = \begin{cases} 1 & \text{für } \underline{r}' \in V \\ 0 & \text{für } \underline{r}' \notin V \end{cases} \qquad \int_V d^3r \, f(\underline{r}) \, \delta(\underline{r}-\underline{r}') = f(\underline{r}') \right.$$

falls $\underline{r}' \in V$ ⌋

$$\Rightarrow \Delta \phi(\underline{r}) = -\frac{4\pi}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \rho(\underline{r}') \, \delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\underline{r})$$

In Worten: Das **Coulomb-Potenzial** $\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$ ist die Lösg der Poissongleichg im gesamten $\mathbb{R}^3$ für eine Punktladg $q=1$ bei $\underline{r}'$ (Ladgsdichte $\delta(\underline{r}-\underline{r}')$)



WEIHNACHTS VORLESUNG

16. Dezember 2025,

Einlass: 9.30 Uhr

Großer Hörsaal der Physik

Es gibt Glühwein von der Fachschaft!

- Bewegte Ladungen ⇒ elektrischer **Strom** $I = \frac{dQ}{dt}$

globaler Erhaltungssatz:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V d^3r\, \rho(\underline{r},t) = -\oint_{\partial V} \delta I$$

vol.: $dV = |\underline{v}|\,dt\cos\alpha\,df$

mit $\delta I = \rho\,\frac{dV}{dt} = \frac{\rho\,|\underline{v}|\,dt\cos\alpha\,|d\underline{f}|}{dt} = \rho\,\underline{v}\cdot d\underline{f}$

↑
Ladung, die durch $d\underline{f}$ pro Zeiteinheit aus V herausströmt

⇒ **Elektrische Stromdichte** $\underline{j}(\underline{r},t) := \rho(\underline{r},t)\,\underline{v}(\underline{r},t)$

↑
Strömungsgeschwindigkeit

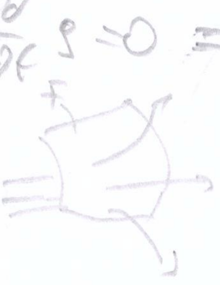
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int_V d^3r\, \rho(\underline{r},t) = -\oint_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{j} \overset{\text{Gauß}}{=} -\int_V d^3r\, \operatorname{div}\underline{j}$$

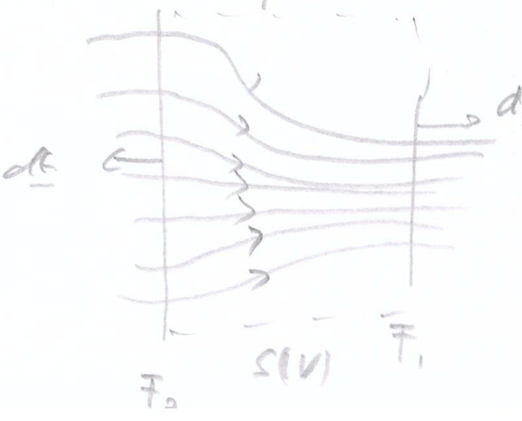
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{r},t) + \operatorname{div}\underline{j}(\underline{r},t) = 0$$ **Kontinuitätsgleichung** der Ladung

(lokaler | Erhaltungssatz)
| Bilanzgleichung

! stationäres ρ: $\frac{\partial}{\partial t}\rho = 0 \Rightarrow \operatorname{div}\underline{j} = 0$ aber nicht notwendig: $\underline{j} = 0$!)

↳ $I = \int_F \underline{j}\cdot d\underline{f}$





$$0 = \int_V d^3r\,\operatorname{div}\underline{j} = \oint_{S(V)} \underline{j}\cdot d\underline{f} = \int_{F_1} \underline{j}\cdot d\underline{f} + \int_{F_2} \underline{j}\cdot d\underline{f}$$

$$= I_1 - I_2$$

$\Rightarrow I_1 = I_2$ Stromkonstant!

Kirchhoffsche Knotenregel: $\sum I_{in} = \sum I_{out}$

$$0 = \int_V d^3r\, \mathrm{div}\, \underline{j} = \int_{S(V)} d\underline{f} \cdot \underline{j}$$

$$= -I_1 - I_2 + I_3 + I_4$$

Ohmsches Gesetz : $U = RI$ **elektrischer Widerstand** R

lokale Form: $\underline{j}(\underline{r},t) = \sigma\, \underline{E}(\underline{r},t)$ **elektrische Leitfähigkeit** σ
(Materialgesetz)

Bsp.: räumlich homogen: $j = \frac{I}{F}$, $E = \frac{U}{l}$

$$\Rightarrow I = \frac{\sigma F}{l} U \Rightarrow R = \frac{l}{\sigma F}$$

- Energiedissipation

a) elektrische Arbeit : Verschiebung von Ladung q um $d\underline{s}$ im E-Feld:

$dW = \underline{F} \cdot d\underline{s} = q\, \underline{E} \cdot d\underline{s} \Rightarrow$ elektrische Leistung: $\frac{dW}{dt} = q\, \underline{E} \cdot \underline{v}$

b) kontinuierliche Ladungsverteilung $\rho(\underline{r})$:

elektrische Leistung am Volumenelement : $dP = \underbrace{\underline{E}(\underline{r}) \cdot \underline{j}(\underline{r})}_{\text{Leistungsdichte}} d^3r$

$$\Rightarrow P = \int_V \underline{j}(\underline{r}) \cdot \underline{E}(\underline{r})\, d^3r$$

Joulesche Leistungsdichte im Ohmschen Leiter: $\underline{E} \cdot \underline{j} = \sigma\, \underline{E}^2$

Gesamte Verlustleistung: $P = \int_V \underline{j} \cdot \underline{E}\, d^3r = I \underset{\uparrow \atop U=RI}{U} = RI^2$

Übersicht: Elektrostatik & Magnetostatik

Elektrostatik (statische Ladungsverteilung)	Magnetostatik (stationäre Ströme)	
$\text{rot}\,\underline{E} = \underline{0}$ (wirbelfrei)	$\text{div}\,\underline{B} = 0$ (quellenfrei)	
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	
$\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi$	$\underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A}$	
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	
$\oint_{\partial F} \underline{E} \cdot d\underline{s} = 0$	$\oint_{\partial V} \underline{B} \cdot d\underline{f} = 0$	
$\varepsilon_0\, \text{div}\,\underline{E} = \rho$	$\text{rot}\,\underline{B} = \mu_0 \underline{j}$	differenzielle Form
$\varepsilon_0 \oint_{\partial V} \underline{E} \cdot d\underline{f} = Q$ (Gauß)	$\oint_{\partial F} \underline{B} \cdot d\underline{s} = \mu_0 I$ (Ampère)	Integralform
$\Delta \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho$	$\Delta \underset{\uparrow}{\underline{A}} = -\mu_0 \underline{j}$ falls $\text{div}\,\underline{A} = 0$	Poisson-Gleichung
$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, \frac{\rho(\underline{r}')}{\lvert \underline{r} - \underline{r}' \rvert}$	$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{\lvert \underline{r} - \underline{r}' \rvert}$	
$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} dr\, \rho(\underline{r}') \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{\lvert \underline{r} - \underline{r}' \rvert^3}$	$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{\lvert \underline{r} - \underline{r}' \rvert^3}$	

Weihnachtsaufgaben

Der Nikolaus und der Weihnachtsbaum

Der Weihnachtsmann sagt zu Knecht Ruprecht: “Wenn ich die Alter meiner drei Lieblingsrentiere multipliziere, erhalte ich 2450. Addiere ich sie, erhalte ich die Höhe des Weihnachtsbaums vor meiner Hütte in cm. Nun sage mir, wie alt die drei Rentiere sind!” Nachdem Knecht Ruprecht die Höhe des Weihnachtsbaums gemessen hatte, kam er zum Weihnachtsmann: “Deine Aufgabe ist aber nicht eindeutig!” Dieser stimmte zu: “Du hast Recht! Ich hatte ganz vergessen zu sagen, dass das Älteste meiner Rentiere immer noch jünger ist als der Nikolaus.” Damit war die Aufgabe eindeutig. Wie hoch ist nun der Weihnachtsbaum und wie alt ist der Nikolaus?

Schlittschuhlaufturnier des Weihnachtsmannes

Um die fittesten unter seinen 1024 Rentieren zu finden, veranstaltet der Weihnachtsmann ein Schlittschuhlaufturnier im KO-System. Es treten immer zwei Rentiere gegeneinander an und das langsamere Rentier fällt aus dem Turnier. In der ersten Runde gibt es also 512 Rennen. In der 2. Runde treffen alle Gewinner der 1. Runde aufeinander, in der 3. Runde die Gewinner der 2. Runde, usw. Wie viele Schlittschuhlaufrennen müssen durchgeführt werden, bis der Gewinner feststeht?
Wichtig: Es zählen nur Lösungen, für die nichts (!) gerechnet wurde. Entwicklung von Reihen, vollständige Induktionen o.ä. führen leider zu Weihnachspunktabzug.

Die nicht perfekte Christbaumkugel

Das Christkind schenkt dem Weihnachtsmann einen 12er-Pack Christbaumkugeln. Die Kugeln sehen zwar identisch aus, aber eine der Kugeln ist ein wenig leichter oder schwerer als alle anderen Kugeln. Das Christkind sagt dem Weihnachtsmann: “Ich gebe dir eine Balkenwaage. Wenn du mit drei mal wiegen herausfindest, welche der Kugeln von den anderen abweicht *und* ob sie leichter oder schwerer ist, dann schenke ich dir auch noch einen Strohstern.” Wie bekommt der Weihnachtsmann mit Sicherheit den Strohstern?

2. Magnetostatik

- stationäre Ströme: $\mathrm{div}\,\underline{j} = 0$

- WW zwischen bewegten Ladungen:

Kraft auf Ladung q, die sich mit $\underline{v}$ bewegt:

$$\underline{F} = q\,\underline{v} \times \underline{B}(\underline{r})$$

Lorentzkraft mit magnetischer Flussdichte / Induktion

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

Ampère-Gesetz (vgl. Coulomb-Gesetz)

SI-Einheiten: $[B] = 1\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Cm}} = 1\,\underbrace{\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{Cs^2}}}_{\mathrm{V}}\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m^2}} = 1\,\mathrm{T}$ (Tesla)

magnetische Feldkonstante (Permeabilität) $\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$ $(\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1)$

Gauß-Einheiten: $[B] = \frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{ESE}} = \frac{\sqrt{\mathrm{g\,cm}}}{\mathrm{cm}} = 1\,\mathrm{G}$ (Gauß) $\Rightarrow 1\,\frac{\mathrm{G}}{c} = 10^{-4}\,\mathrm{T}$

- Kraft zwischen 2 stromdurchflossenen Leitern:

(Stromfäden Magnetostatik $\hat{=}$ Punktladungen Elektrostatik)

Stromdichte L': $\underline{j}(\underline{r}')\,d^3r' = \rho\, d^3r'\, \overset{\frac{d\underline{r}'}{dt}}{\underline{v}'} = \frac{\rho\, d^3r'}{dt}\, d\underline{r}' = I'\, d\underline{r}'$

$$\Rightarrow \underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I' \int_{L'} d\underline{r}' \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

Biot-Savart-Gesetz

Kraft auf Ladung im Volumenelement d^3r von L: $d\underline{F} = \rho\,\underline{v} \times \underline{B}\, d^3r = \underline{j} \times \underline{B}\, d^3r$
$= I\, d\underline{r} \times \underline{B}$

$$\underline{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I I' \int_{L} d\underline{r} \times \int_{L'} d\underline{r}' \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

(Ampère-Gesetz)

vgl. $\underline{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\, q q' \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$

mit $\underbrace{d\underline{r}}_{a}\times(\underbrace{d\underline{r}'}_{b}\times\underbrace{(\underline{r}-\underline{r}')}_{c}) = \underbrace{(d\underline{r}\cdot(\underline{r}-\underline{r}'))\,d\underline{r}'}_{b(a\cdot c)} - \underbrace{(d\underline{r}\cdot d\underline{r}')\,(\underline{r}-\underline{r}')}_{c(a\cdot b)}$

und $\int_L d\underline{r}'\,\frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} = -\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\Big|_{L\,\text{Anfang}}^{L\,\text{Ende}} = 0$ (geschlossen oder [illegible]

folgt: $\underline{F} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\, I I' \iint_{L\;L'} (d\underline{r}\cdot d\underline{r}')\,\frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$

⇒ parallele Ströme ($I d\underline{r}\cdot I' d\underline{r}' > 0$): Anziehung

antiparallele Ströme ($I d\underline{r}\cdot I' d\underline{r}' < 0$): Abstoßung

∘ Vektorpotential: $\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\,\frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$

$\Rightarrow \quad \underline{B}(\underline{r}) = \mathrm{rot}\,\underline{A}(\underline{r})$

Beweis: $\underset{\overset{\uparrow}{\text{bzgl. }\underline{r}!}}{\underline{\nabla}_r}\times\underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\,\overbrace{\left(\nabla_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right)}^{-\frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}}\times\underline{j}(\underline{r}')$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\,\underline{j}(\underline{r}')\times\frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} = \underline{B}$$

(i) $\underline{B} = \mathrm{rot}\,\underline{A}$

$\Downarrow$

(ii) $\mathrm{div}\,\underline{B} = \underline{0}$ (keine magnet. Quellen): $\underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{A}) = 0$)

$\Updownarrow$

(iii) $\oint_{\partial V}\underline{B}\cdot d\underline{f} = 0$ (keine magnetischen Ladungen)

vgl. $\oint_{\partial V}\underline{E}\cdot d\underline{f} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

Beweis: (ii)⇔(iii) durch Gauß'schen Satz:

$\oint_{\partial V}\underline{B}\cdot d\underline{f} = \int_V d^3r\,\mathrm{div}\,\underline{B}$: (ii) $\Rightarrow \oint_{\partial V}\underline{B}\cdot d\underline{f} = 0 \Rightarrow$ (iii)

(iii) $\Rightarrow \int d^3r\,\mathrm{div}\,\underline{B} = 0 \Rightarrow$ (ii)

- Das Vektorpotenzial $\underline{A}$ ist durch $\underline{B}$ nicht eindeutig bestimmt !

↳ Eichtransformation $\underline{A} \to \underline{A}' = \underline{A} + \underline{\nabla}\,\Phi$ mit beliebiger Funktion $\Phi(\underline{r},t)$

$(\underline{\nabla}\times\underline{\nabla}\Phi = 0 \Rightarrow \underline{\nabla}\times\underline{A}' = \underline{\nabla}\times\underline{A} = \underline{B})$

Bsp: homogenes $\underline{B}$-Feld : $\underline{B} = B_0\,\underline{e}_z$

symmetrische Eichung: $\underline{A} = \frac{1}{2}\underline{B}\times\underline{r} = \frac{B_0}{2}\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}$

↳ Test: $\underline{\nabla}\times\underline{A} = \frac{1}{2}\underbrace{\underline{\nabla}}_{a}\times(\underbrace{\underline{B}}_{b}\times\underbrace{\underline{r}}_{c}) = \frac{1}{2}\underbrace{\underline{B}(\underline{\nabla}\cdot\underline{r})}_{b(a\cdot c)} - \frac{1}{2}\underbrace{(\underline{B}\cdot\underline{\nabla})\underline{r}}_{c(a\cdot b)}$

$= \frac{1}{2}\underline{B}\cdot 3 - \frac{1}{2}\underline{B}_0\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{3}{2}\underline{B} - \frac{1}{2}\underline{B} = \underline{B}$

Landau-Eichung: $\underline{A}'^{(1)} = B_0\begin{pmatrix}-y\\0\\0\end{pmatrix}$ oder $\underline{A}'^{(2)} = B_0\begin{pmatrix}0\\x\\0\end{pmatrix}$

Test: $\underline{\nabla}\times\underline{A}'^{(1)} = B_0\begin{vmatrix}\underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ -y & 0 & 0\end{vmatrix} = B_0\left(-\partial_y(-y)\right)\underline{e}_z = B_0\underline{e}_z = \underline{B}$

$\underline{\nabla}\times\underline{A}'^{(2)} = B_0\begin{vmatrix}\underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ 0 & x & 0\end{vmatrix} = B_0\,(\partial_x x|\underline{e}_z) = B_0\underline{e}_z = \underline{B}$

Wie lautet die Eichtransformation $\Phi(\underline{r})$?

$\Phi = -\frac{1}{2}B_0 xy$ bzw. $\Phi = \frac{1}{2}B_0 xy$

↳ $\underline{\nabla}\Phi = -\frac{1}{2}B_0\begin{pmatrix}y\\x\\0\end{pmatrix}$ bzw $\underline{\nabla}\Phi = \frac{1}{2}B_0\begin{pmatrix}y\\x\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \underline{A}+\underline{\nabla}\Phi = \frac{B_0}{2}\left[\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}y\\x\\0\end{pmatrix}\right]$ bzw $\underline{A}+\underline{\nabla}\Phi = \frac{B_0}{2}\left[\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}y\\x\\0\end{pmatrix}\right]$

$= B_0\begin{pmatrix}y\\0\\0\end{pmatrix} = \underline{A}'^{(2)}$

$= B_0\begin{pmatrix}0\\x\\0\end{pmatrix} = \underline{A}'^{(1)}$

$$\underline{a} \times \underline{b} \times \underline{c} \qquad \underline{b}(\underline{a}\cdot\underline{c}) - (\underline{a}\cdot\underline{b})\underline{c}$$

- $$\text{rot}\,\underline{B} = \underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{A}) = \underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{A}) - \underset{\uparrow (\underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla})}{\Delta}\,\underline{A}$$

$$\text{mit } \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bzgl. } \underline{r}!}}{\underline{\nabla}_r}\cdot\underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\,\underline{\nabla}_r\cdot\frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\,\underline{j}(\underline{r}')\left(-\underset{\substack{\uparrow \\ \text{bzgl. } \underline{r}'!}}{\underline{\nabla}_{r'}}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right)$$

$$\overset{\substack{\text{Produkt-} \\ \text{regel} \\ \downarrow}}{=} \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\left[-\underline{\nabla}_{r'}\left(\frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right) + \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\underbrace{\underline{\nabla}_{r'}\,\underline{j}(\underline{r}')}_{\substack{=0 \text{ weil stationär} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\rho + \text{div}\,\underline{j} = 0 \right.\\ \left.\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\rho = 0\right)}}\right]$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\,\underline{\nabla}_{r'}\left(\frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right)$$

$$\overset{\substack{\text{Satz v. Gauß} \\ \downarrow}}{=} -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Sphäre mit Radius} \to \infty}}{S_\infty}} d\underline{f}'\,\frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = 0 \quad \text{für hinreichend schnell abklingende } (r\to\infty) \text{ Stromverteilung}$$

$$(\text{Coulomb-Eichg: } \underline{\nabla}\cdot\underline{A} = 0)$$

$$\Rightarrow \text{rot}\,\underline{B} = -\Delta\underline{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\,\underline{j}(\underline{r}')\underbrace{\Delta\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{=-4\pi\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')}$$

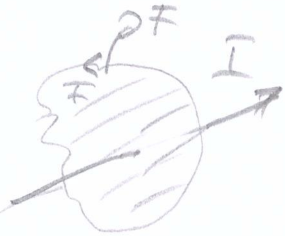
$$\Rightarrow \text{rot}\,\underline{B} = \mu_0\,\underline{j}(\underline{r}) \qquad (\text{nur für stationäre Strom- und Ladungsverteilungen!})$$

$$\Rightarrow \Delta\underline{\underline{A}} = -\mu_0\,\underline{j}(\underline{r}) \qquad \text{vektorielle Poisson-Gleichg}$$

$$\left(\text{vgl. } \Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\right)$$

Satz v. Stokes

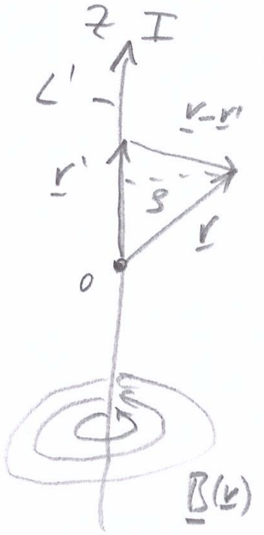
- $$\int_F d\underline{f} \cdot \mathrm{rot}\,\underline{B} \overset{!}{=} \oint_{\partial F} d\underline{s} \cdot \underline{B} = \mu_0 \underbrace{\int_F d\underline{f} \cdot \underline{j}(\underline{r})}$$



$$\Rightarrow \underbrace{\oint_{\partial F} d\underline{s} \cdot \underline{B}}_{\text{Zirkulation entlang geschlossenem Weg } \partial F} = \mu_0 \underbrace{I}_{\text{Strom durch eine geschlossene Fläche}}$$

Ampère'sches Durchflutungsgesetz

Bsp.: (i) gerader Leiter (unendlich lang)



magnetische Induktion: Biot-Savart-Gesetz

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{L'} d\underline{r}' \times \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

Zylinderkoordinaten: $\underline{r}' = z'\underline{e}_z \Rightarrow d\underline{r}' = dz'\underline{e}_z$

$$\underline{r}-\underline{r}' = \rho\,\underline{e}_\rho + (z-z')\,\underline{e}_z$$

$$\underline{e}_z \times \left[\rho\,\underline{e}_\rho + (z-z')\,\underline{e}_z\right] = \rho\,\underline{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\rho\,\underline{e}_\varphi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{\left[\rho^2 + (z-z')^2\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{\rho}\,\underline{e}_\varphi \underbrace{\left.\frac{z'-z}{\left[\rho^2+(z-z')^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right|_{-\infty}^{\infty}}_{=2}$$

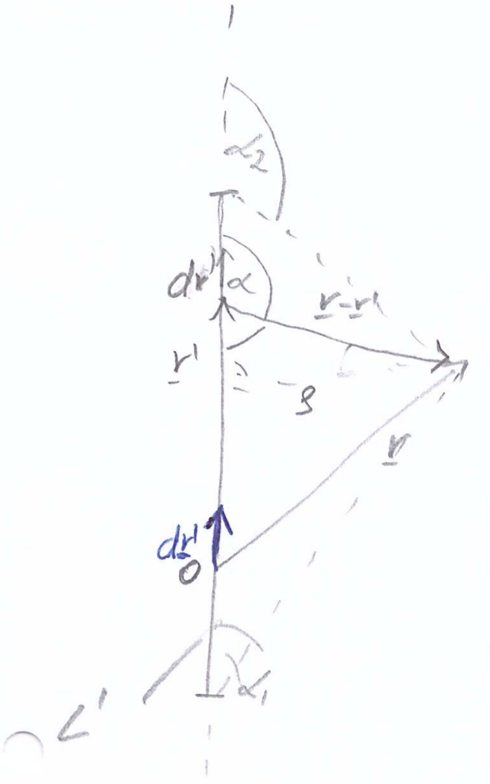
$$= \overbrace{\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\rho}}^{|B| = B(\rho) = B_\varphi(\rho)}\underline{e}_\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\rho^2}\begin{pmatrix}-\rho\sin\varphi\\ \rho\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\rho^2}\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix}$$

$\underline{B}$-Linien: konzentrische Kreise um L

- Zirkulation der magnetischen Induktion:

$$\oint \underline{B} \cdot d\underline{s} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\rho}\underbrace{\int_0^{2\pi} \rho\,d\varphi}_{2\pi\rho} = \mu_0 I$$

(ii) gerader Leiter (endliche Länge)



$$|\underline{B}(\underline{r})| = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{L'} \frac{d\underline{r}'\times(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{L'} \frac{dr'\,|r-r'|\sin\alpha}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

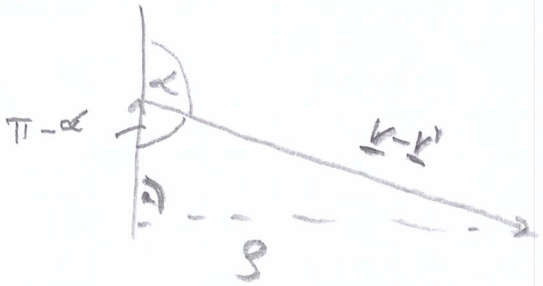
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha\, \frac{\cancel{|\underline{r}-\underline{r}'|^2}}{|\underline{r}-\underline{r}'|^{\cancel{3}}}$$

$$|d\underline{r}'\times(\underline{r}-\underline{r}')| = dr'\,|\underline{r}-\underline{r}'|\sin\alpha$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha\, \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$ ← hängt von α ab!

$$dr'\sin\alpha = |\underline{r}-\underline{r}'|\,d\alpha$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha\, \sin\alpha$$



$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}\Big[-\cos\alpha\Big]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)$$

$$\sin(\pi-\alpha) = \frac{\rho}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \sin\alpha$$

Test: unendlich langer Leiter: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$

$\cos\alpha_1 = 1$, $\cos\alpha_2 = -1$

$$\Rightarrow |\underline{B}(\underline{r})| = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}\left(1-(-1)\right)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \quad (= B(\rho))$$

- Induktionsgesetz

neu: nicht stationäre Ströme & Ladungsverteilungen und Felder

zeitlich veränderliche Magnetfelder induzieren eine Spannung in einer Leiterschleife (Faraday 1831)

$$\oint_C \underline{E}\cdot d\underline{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi(r,t)$$ Faradaysches Induktionsgesetz

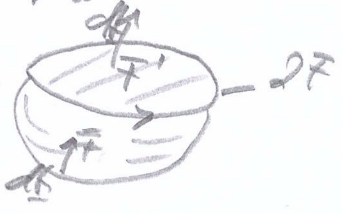
$\Phi(t)$: magnetischer Fluss $\Phi := \int_F \underline{B}\cdot d\underline{f} = \int_F \text{rot}\,\underline{A}\cdot d\underline{f} \overset{\text{Satz v. Stokes}}{=} \oint_{\partial F} \underline{A}\cdot d\underline{s}$

Änderung von Φ: a) durch $\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}$ (Trafo)

b) durch $\frac{\partial}{\partial t}F$ (Dynamo)

Φ hängt nur vom Rand ∂F ab:

↳ F und F': 2 Flächen mit demselben Rand ∂F, die ein Volumen V einschließen:



$$\int_F d\underline{f}\cdot\underline{B} - \int_{F'} d\underline{f}\cdot\underline{B} = \oint_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{B} \underset{\text{Gauß}}{\overset{\uparrow}{=}} \int_V d^3r\ \underbrace{\text{div}\,\underline{B}}_{=0} = 0$$

Potenzialdifferenz bei 1 Umlauf: $\Delta\phi = U_{ind} = -\oint_{\partial F}\underline{E}\cdot d\underline{s}$
(induzierte Spannung)

- $$\oint_{\partial F}\underline{E}\cdot d\underline{s} \overset{\text{Stokes}}{=} \int_F \text{rot}\,\underline{E}\cdot d\underline{f} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_F \underline{B}\cdot d\underline{f}$$

Im Ruhesystem des Leiters (F fest) gilt:

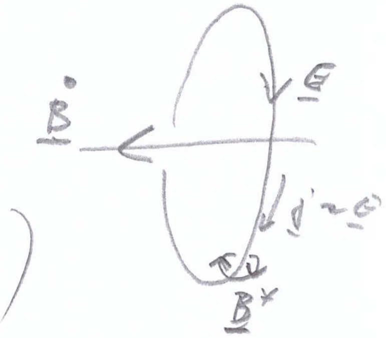
$$\int_F d\underline{f}\cdot\left(\text{rot}\,\underline{E} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{B}\right) = 0 \Rightarrow \text{rot}\,\underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}$$ differenzielle Form des Induktionsgesetzes

Lenzsche Regel

$\dot{\underline{B}}$ => $\underline{E}$ induziert (rot $\underline{E} = -\dot{\underline{B}}$)

$\underline{E}$ => Ladungsbewegung => $\underline{j} \sim \underline{E}$

$\underline{j}$ => $\underline{B}^*$ erzeugt (rot $\underline{B}^* = \mu_0 \underline{j}$)



$\underline{B}^*$ ist $\dot{\underline{B}}$ entgegengerichtet

3. Maxwell-Gleichungen

Bisher $\mathrm{div}\,\underline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (Gauß/Coulomb)

$\mathrm{div}\,\underline{B} = 0$ (quellenfrei)

$\mathrm{rot}\,\underline{E} = -\dot{\underline{B}}$ (Faraday)

$\mathrm{rot}\,\underline{B} = \mu_0 \underline{j}$ (Ampère)

Maxwell's Ergänzung des Ampèreschen Durchflutungsgesetzes für nichtstationäre Vorgänge:

$\mu_0\,\mathrm{div}\,\underline{j} = \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\underline{B} = \underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{B}) = 0$ folgt ein (scheinbarer) Widerspruch zur Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot\underline{j} = 0$

Idee: $\mathrm{rot}\,\underline{B} = \mu_0(\underline{j} + \underline{j}_0)$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{div}\,\underline{j}_0 = \frac{1}{\mu_0}\underbrace{\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\underline{B}}_{=0} - \mathrm{div}\,\underline{j} = \frac{\partial\rho}{\partial t} = \varepsilon_0\,\mathrm{div}\,\dot{\underline{E}}$$

$\Rightarrow$ Setze: $$\frac{1}{\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\underline{B} = \underline{j} + \varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}$$

↑ Leitungs-Stromdichte

Konvektions-Stromdichte

↑ Maxwellsche Verschiebungsstromdichte

neue Feldgrößen: $\underline{D}(\underline{r},t) = \varepsilon_0\, \underline{E}(\underline{r},t)$ dielektrische Verschiebung

$\underline{H}(\underline{r},t) = \frac{1}{\mu_0}\, \underline{B}(\underline{r},t)$ Magnetfeld / magnetische Feldstärke

---

Maxwell-Gleichungen in differenzieller Form:

$$\left.\begin{aligned} \text{rot}\,\underline{E} + \dot{\underline{B}} &= 0 \\ \text{div}\,\underline{B} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{homogen}$$

Wechselwirkung der Probeladung mit $\underline{E}, \underline{B}$

$$\left.\begin{aligned} \text{div}\,\underline{D} &= \rho \\ \text{rot}\,\underline{H} - \dot{\underline{D}} &= \underline{j} \end{aligned}\right\} \text{inhomogen}$$

Erzeugung der Felder $\underline{D}, \underline{H}$ durch Ladungen und Ströme

Maxwell-Gleichungen in Integralform:

$$\oint_{\partial F} \underline{E}\cdot d\underline{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_F \underline{B}\cdot d\underline{f} = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi$$

Zirkulationen von $\underline{E}$ entlang der geschlossenen Linie
= zeitliche Abnahme des eingeschlossenen magnetischen Flusses

$$\oint_{\partial V} \underline{B}\cdot d\underline{f} = 0$$

magnetischer Fluss durch geschlossene Fläche $= 0$

$$\oint_{\partial V} \underline{D}\cdot d\underline{f} = Q$$

Fluss des elektrischen Feldes durch ∂V
= eingeschlossene Ladungen $\frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V d^3r\, \rho$

$$\oint_{\partial F} \underline{H}\cdot d\underline{s} = \int_F \dot{\underline{D}}\, d\underline{f} + I$$

Zirkulation der magnetischen Feldstärke entlang geschlossener Linie
= dielektrischer Verschiebungsstrom
+ Konvektionsstrom $I = \int_F d\underline{f}\cdot\underline{j}$

- Maxwell-Gleichungen in Materie ($\underline{E}$-Feld)

↳ mikroskopische Ursache: (i) freie Ladungsträger (Elektronen im Metall)

(ii) gebundene Ladungen (in Isolatoren / Dielektrika)

↳ Dipole schon bei $\underline{E}=0$ vorhanden

↳ induziert durch $\underline{E}$-Feld

↳ makroskopische Auswirkung: (i) elektrische Ströme

(ii) Minimierung der potenziellen Energie $W_d = -\underline{P}\cdot$ (Dipolm)

Polarisierung

↳ Beschreibung durch effektive Felder ($\underline{D}, \underline{H}, \ldots$), die die räumlich gemittelten Dipoldichten erhalten.

- elektrostatisches Potenzial (mikroskopische freie Ladungen q_j und elektr. Dipolmomente $\underline{p}_j$)

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_j \left(\frac{q_j}{|\underline{r}-\underline{r}_j|} + \frac{\underline{p}_j \cdot (\underline{r}-\underline{r}_j)}{|\underline{r}-\underline{r}_j|^3} \right)$$

↳ räumliche Mittelung: $\rho(\underline{r}) = \frac{1}{V(\underline{r})} \sum_{j\in V} q_j$ makroskopische freie Ladungsdichte

$$\underline{P}(\underline{r}) = \frac{1}{V(\underline{r})} \sum_{j\in V} \underline{p}_j$$ — " — mittlere Dipoldichte (Polarisation)

$$\hookrightarrow \phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \Bigg(\underbrace{\frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{\text{freie}} + \underbrace{\underline{P}(\underline{r}') \cdot \underbrace{\frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}}_{\underline{\nabla}_{r'} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}}_{\text{gebundene Ladungen}} \Bigg)$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \underline{E} = -\Delta_r \phi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \Big(\rho(\underline{r}') \underbrace{\Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{=-4\pi\delta(\underline{r}-\underline{r}')} + \underline{P}(\underline{r}') \cdot \underline{\nabla}_{r'} \underbrace{\Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{=-4\pi\delta(\underline{r}-\underline{r}')} \Big)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\underline{r}) + \frac{1}{\varepsilon_0} \int d^3r' \, \underline{P}(\underline{r}') \cdot \underbrace{\underline{\nabla}_{r'} \delta(\underline{r}-\underline{r}')}_{=-\underline{\nabla}_r \delta(\underline{r}-\underline{r}')} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\underline{r}) - \frac{1}{\varepsilon_0} \underline{\nabla}_r \cdot \int d^3r' \, \underline{P}(\underline{r}) \delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \Big(\rho(\underline{r}) - \underbrace{\underline{\nabla}_r \cdot \underline{P}(\underline{r})}_{=-\rho_p(\underline{r})} \Big) \quad \text{mit } \rho_p := -\underline{\nabla} \cdot \underline{P}$$ Polarisationsladungsdichte

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\underbrace{\varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P}}) = \rho$$ differenzielle Form des Gauß'schen Gesetzes in Materie

$\underline{D}$ Dielektrische Verschiebung (in Materie)

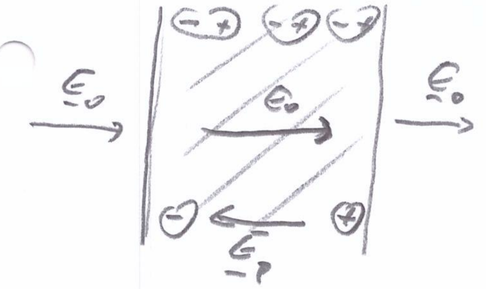
↳ $\underline{E}$: Quellen sind freie & gebundene Ladungen

$\underline{D}$: — " — nur die freien Ladungen

$\underline{P}$: inneres Gegenfeld mit Polarisationsladungen als Quellen

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \underline{E}_P = \rho_P \,, \quad \underline{P} = -\varepsilon_0 \underline{E}_P$$

Bsp: Kondensator mit Dielektrikum



$\underline{E}_0$: äußeres Feld (freie Ladungen erzeugt)

$\underline{E}_p = -\frac{1}{\varepsilon_0}\underline{P}$ (Gegenfeld durch Dipole erzeugt)

$$\underline{E} = \underline{E}_0 + \underline{E}_P = \underline{E}_0 - \frac{1}{\varepsilon_0}\underline{P} < \underline{E}_0$$

Polarisationsladung verschwindet!

$$Q_P = \int_V d^3r \, \rho_P(\underline{r}) = -\int_V d^3r \operatorname{div}\underline{P} \overset{\text{Gauß}}{=} -\int_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{P} = 0 \left(P|_{\partial V} = 0\right.$$

- Maxwell-Gleichungen in Materie (Magnetismus)

↳ mikroskop. Ursache (iii) Kreisströme / **magnetische Dipolmomente $\underline{m}$** :

↳ permanent vorhanden

↳ gemäß Lenzschen Regel und Faraday-Gesetz induziert

↳ permanente Dipolmomente richten sich unterhalb einer kritischen Temp. spontan aus (QM): parallel ohne äußeres $\underline{B}$-Feld

↳ makroskop. Auswirkg: → **Paramagnetismus**

→ **Diamagnetismus**

→ **kollektiver Magnetismus**: – **Ferromagnetismus** $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$

– **Ferrimagnetismus** $\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$

– **Antiferromagnetismus** $\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$

↳ Beschreibung durch **mittlere magnetische Dipoldichte (Magnetisierung)** $\underline{M}(\underline{r}) = \frac{1}{V(\underline{r})}\sum_{j\in V}\underline{m}_j$

- Vektorpotenzial: $\underline{A}_m(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_j \underline{m}_j \times \frac{\underline{r}-\underline{r}_j}{|\underline{r}-\underline{r}_j|^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\sum_j \underline{m}_j \times \underline{\nabla}_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}}$

↳ räumliche Mittelung: $\underline{A}_m(\underline{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\, \underline{M}(\underline{r}') \times \underline{\nabla}_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\, \underline{\nabla}_r \times \underline{M}(\underline{r}')\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot}\underline{B} \overset{\substack{\text{Coulomb-Eichg.}\\ \operatorname{div}\underline{A}=0}}{=} -\Delta\underline{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \left(\underline{j}(\underline{r}')\underbrace{\Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{=-4\pi\delta(\underline{r}-\underline{r}')} + \underline{\nabla}_r \times \underline{M}(\underline{r}')\underbrace{\Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{=-4\pi\delta(\underline{r}-\underline{r}')}\right)$$

$$= \mu_0\left(\underline{j}(\underline{r}) + \underline{\nabla}_r \times \underline{M}(\underline{r})\right) = \mu_0\left(\overset{\text{freie Ströme}}{\underline{j}(\underline{r})} + \overset{\text{magn. Dipole}}{\underline{j}_M(\underline{r})}\right)$$

mit $\underline{j}_M = \underline{\nabla} \times \underline{M}$ **Magnetisierungsstromdichte**

$$\Rightarrow \mathrm{rot}(\underbrace{\underline{B} - \mu_0 \underline{M}}_{\mu_0 H}) = \mu_0 \underline{j}$$

differenzielle Form des Ampères im Durchflutungsgesetzes in Materie

$\mu_0 H$ Magnetfeld/ Magnetfeldstärke $\Rightarrow \mathrm{rot}\,\underline{H} = \underline{j}$

↳ $\underline{B}$: erzeugt (deren Wirbel) durch freie Ströme und magnet. Dipole

$\underline{H}$: –"– ———— nur durch freie Ströme

M: zusätzliche magn. Induktion $\underline{B}_M$ (Wirbel = Magnetisierungsstromdichte)

$$\mathrm{rot}\,\underline{B}_M = \mu_0 \underline{j}_M, \quad \underline{B}_M = \mu_0 \underline{M}$$

$$\underline{B} = \underline{B}_0 + \underline{B}_M$$

- Kontinuitätsgleichung: $\dot{\underline{\rho}}_p + \underline{\nabla}\,\underline{j}_p = 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \rho_p = -\nabla P}}{\Rightarrow} \underline{\nabla}\cdot(\dot{\underline{P}} - \underline{j}_p) = 0$

$\Rightarrow$ Polarisationsstromdichte $\underline{j}_p = \dot{\underline{P}}$

$\Rightarrow$ vollständiges Durchflutungsgesetz

$$\mathrm{rot}\,\underline{B} = \mu_0 (\underset{\text{frei}}{\underline{j}} + \underset{\text{magn.}}{\underline{j}_M} + \underset{\text{polari.}}{\underline{j}_p}) + \underbrace{\varepsilon_0 \mu_0 \dot{\underline{E}}}_{\text{Vakuumverschiebungsstrom}}$$

$$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu_0}\underline{B} - \underline{M}\right) = \underline{j} + \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{(\varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P})}_{= \underline{D}}$$

(Verschiebungsstrom in Materie: $\dot{\underline{D}}$)

Maxwell-Gleichungen in Materie

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\underline{E} + \dot{\underline{B}} &= 0 \\ \mathrm{div}\,\underline{B} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{WW der Felder mit Probeladungen}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{div}\,\underline{D} &= \rho \\ \mathrm{rot}\,\underline{H} - \dot{\underline{D}} &= \underline{j} \end{aligned}\right\} \text{Erzeugung der Felder durch freie Ladungen / Ströme}$$

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu_0}\underline{B} - \underline{M}$$

Was fehlt zur Vollständigkeit der Gleichungen?

↳ Materialgleichungen: $\underline{P} \longleftrightarrow \underline{E}, \quad \underline{M} \longleftrightarrow \underline{B}$

- Bsp: linearer, isotroper, lokaler, instantaner Zusammenhang

$$\underline{P} = \epsilon_0 \chi_e \underline{E} \quad \text{mit } \chi_e$$ elektrische Suszeptibilität

$$\underline{M} = \chi_M \underline{H} \quad \text{mit } \chi_M$$ magnetische Suszeptibilität

(Materialkonstanten für lineare Antwort,
↳ aus mikroskopischen Theorien (QM!)
abzuleiten

↳ $\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P} = \epsilon_0 (1+\chi_e) \underline{E} = \epsilon_0 \epsilon \underline{E}$

mit $\epsilon = 1+\chi_0$ relative Dielektrizitätskonstante

$\underline{B} = \mu_0 (\underline{H} + \underline{M}) = \mu_0 (1+\chi_M) \underline{H} = \mu_0 \mu \underline{H}$

mit $\mu = 1+\chi_M$ relative Permeabilität / Magnetkonstante

$$\Rightarrow \underline{M} = \chi_M \underline{H} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi_M}{\mu} \underline{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi_M}{1+\chi_M} B$$

paramagnetisch: $\frac{\chi_M}{1+\chi_M} > 0 \quad (\chi_M > 0 \Rightarrow \mu > 0)$

diamagnetisch: $\frac{\chi_M}{1+\chi_M} < 0 \quad (-1 < \chi_M < 0 \Rightarrow 0 < \mu < 1)$

• Energiebilanz:

Test: Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \underline{j} = 0$

mit $\rho = \underline{\nabla} \cdot \underline{D}$ $\quad \hookrightarrow \underline{\nabla} \cdot (\dot{\underline{D}} + \underline{j}) \underset{\underset{\underline{\nabla} \times \underline{H} - \dot{\underline{D}} = \underline{j}}{\uparrow}}{=} \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{H}) = 0$ (Ladungserhaltung)

Frage: Welche Erhaltungssätze in Maxwellgleichungen enthalten?

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} + \frac{\partial}{\partial t} \underline{B} = 0 \quad | \cdot \underline{H} \quad \Rightarrow \underline{H} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{E}) + \underline{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \underline{B} = 0 \qquad (1)$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{H} - \frac{\partial}{\partial t} \underline{D} = \underline{j} \quad | \cdot \underline{E} \quad \Rightarrow \underline{E} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{H}) - \underline{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \underline{D} = \underline{j} \cdot \underline{E} \qquad (2)$$

(1) − (2): $\underbrace{\underline{H} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{E}) - \underline{E} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{H})} + \underline{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \underline{B} + \underline{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \underline{D} = -\underline{j} \cdot \underline{E}$

$$= \underline{\nabla} \cdot (\underline{E} \times \underline{H}) = \underline{\nabla} \cdot (\underline{E} \times \underline{H}) + \underline{\nabla} \cdot (\underline{E} \times \underline{H})$$

und $\underline{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \underline{B} = \frac{1}{\mu\mu_0} \underline{B} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \underline{B} = \frac{1}{2\mu\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \underline{B}$

$$= \underline{H} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{E}) + \underline{E} \cdot (\underline{H} \times \underline{\nabla})$$

$\underline{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \underline{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \underline{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \underline{E} = \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}$

$$= \underline{H} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{E}) - \underline{E} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{H})$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\nabla} \cdot \underbrace{(\underline{E} \times \underline{H})}_{= \underline{S}} + \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left(\frac{1}{2\mu\mu_0} \underline{B}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 \underline{E}^2 \right)}_{= \frac{1}{2}(\underline{E} \cdot \underline{D} + \underline{B} \cdot \underline{H}) = w} = \underbrace{-\underline{j} \cdot \underline{E}}_{\sigma}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} w + \underline{\nabla} \times \underline{S} = \sigma$$

w : Energiedichte des elektromagnetischen Feldes

$\underline{S}$: Energiestromdichte (Poynting-Vektor)

σ : Leistungsdichte (Quelldichte der Feldenergie)

$\sigma = -\underline{j} \cdot \underline{E} < 0$: Abnahme (Joule'sche Wärme)

> 0 : Zunahme (Antennenabstrahlung)

der Feldenergie

4. Wellen

Verwende Lorentz-Eichung $\underline{\nabla}\cdot\underline{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\phi = 0$

$$\text{(i)} \quad -\underline{\nabla}\cdot\underline{E} = \underline{\nabla}\left(\underline{\nabla}\phi + \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\phi + \frac{\partial}{\partial t}\underline{\nabla}\cdot\underline{A} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\overset{\text{Lorentz-Eichg}}{\Rightarrow} \quad \Delta\phi - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{1}{\mu_0}\underline{\nabla}\times\underline{B} - \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\underline{E} = \underline{j}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{A})}_{\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{A}) - \underline{\Delta A}} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\Big(\underline{\nabla}\phi + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\underline{A}}\Big) = \mu_0\underline{j}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\underline{A} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{A} - \underline{\nabla}\underbrace{\left(\underline{\nabla}\cdot\underline{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\phi\right)}_{=0\ \text{(Lorentz-Eichg)}} = -\mu_0\underline{j}$$

Zusammengefasst mit $\Box := \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ d'Alembert-Operator

$$\Box\,\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

inhomogene Wellengleichg

$$\Box\,\underline{A} = -\mu_0\underline{j}$$

und $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 2{,}994 \times 10^8 \frac{m}{s}$

Lichtgeschwindigkeit

im Vakuum: $\rho = 0$, $\underline{j} = 0$: $\Box\,\phi = 0$ homogene Wellengleichg

$$\Box\,\underline{A} = 0$$

mit $\underline{E} = -\overset{\circ}{\underline{A}} - \nabla\phi$, $\underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A}$ gilt auch: $\Box\,\underline{E} = 0$, $\Box\,\underline{B} = 0$

$$\hookrightarrow \underline{\nabla}\times(\underbrace{\underline{\nabla}\times\underline{E}}_{=-\dot{\underline{B}}}) = \underline{\nabla}(\underbrace{\underline{\nabla}\cdot\underline{E}}_{=0}) - \Delta\underline{E} = -\underline{\nabla}\times\overset{\circ}{\underline{B}} \underset{\substack{\uparrow \\ \underline{\nabla}\times\underline{B} = \varepsilon_0\mu_0\underline{E}}}{=} -\varepsilon_0\mu_0\ddot{\underline{E}} \Leftrightarrow \left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\underline{E} = 0$$

$$\underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{B}) = \underline{\nabla}(\underbrace{\underline{\nabla}\cdot\underline{B}}_{=0}) - \Delta\underline{B} = \mu_0\varepsilon_0\underline{\nabla}\times\dot{\underline{E}} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{B} \Leftrightarrow \left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\underline{B} = 0$$

allgem.: Skalare Wellengleichg $\Box\phi = \Delta\phi - \frac{1}{v^2}\ddot{\phi} = 0$

Bsp.: 1D: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$: Lösungsansatz: $\phi(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$

$\Rightarrow \phi_x = Ak\cos(kx-\omega t)$, $\phi_t = -A\omega\cos(kx-\omega t)$

$\phi_{xx} = -Ak^2\sin(kx-\omega t)$, $\phi_{tt} = -A\omega^2\sin(kx-\omega t)$

$\Rightarrow$ Einsetzen: $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x,t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(x,t) = 0$

$\Leftrightarrow -\left(k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}\right)A\sin(kx-\omega t) = 0 \quad \forall x,t$

$\Rightarrow \omega = \pm vk$ Dispersionsgleichg / -beziehg $(\lambda\nu = v)$

Wellenzahl: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ Kreisfrequenz: $\omega = 2\pi\nu$ Wellenlänge: λ

Phasengeschwindigkeit: $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\varphi=\mathrm{const}} = \frac{\omega}{k} = v$ Periodendauer: $T = \frac{2\pi}{\omega}$ Amplitude A

Phase: $\varphi(x,t) := kx - \omega t$

vektorielle Wellengleichg: $\underline{A} \in \mathbb{R}^3$: $\Box\underline{A} = \left(\Delta - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\underline{A} = 0$

spezielle Lösungen: harmonische ebene Wellen

$\underline{A}(\underline{r},t) = \underline{A}_0\sin(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)$ oder komplex: $\underline{A}(\underline{r},t) = \underline{A}_0 e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$

$\hookrightarrow A^{(i)}_{xx} = -k_x^2 A^{(i)}_0 \sin(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)$

$A^{(i)}_{yy} = -k_y^2 A^{(i)}_0 \sin(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)$

$A^{(i)}_{zz} = -k_z^2 A^{(i)}_0 \sin(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)$

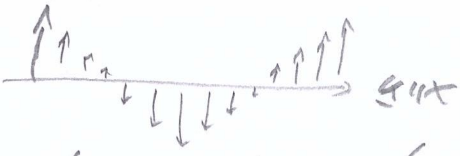
Flächen konstanter Phase:

$\varphi_0 = \underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t$

$\underline{\nabla}\varphi(\underline{r},t) = \underline{\nabla}(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t) = \underline{k}$ Wellenvektor

Ausbreitungsrichtg: $\frac{\underline{k}}{|\underline{k}|}$ Wellenlänge: $\lambda = \frac{2\pi}{|\underline{k}|}$

Bsp.: (i) Transversalwelle $\underline{A}_0 \perp \underline{k}$



$$\underline{\nabla} \cdot \underline{A} = \underline{A}_0 \cdot \underline{\nabla} \sin(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t) = \underbrace{\underline{A}_0 \cdot \underline{k}}_{=0} \cos(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t) = 0$$ (quellenfrei!)

Lichtwelle im Vakuum

(ii) Longitudinalwelle $\underline{A}_0 \parallel \underline{k}$

$$\underline{\nabla} \times \underline{A} = \underbrace{\underline{k} \times \underline{A}_0}_{=0} \cos(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t) = 0$$ (wirbelfrei)

Schallwellen

allgemein: Zerlegen in transversalen und longitudinalen Anteil

$$\underline{A}(\underline{r},t) = \underline{A}_t(\underline{r},t) + \underline{A}_l(\underline{r},t)$$

Bsp: (i) $\underline{B}$ immer transversal ($\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0$)

(ii) $\underline{E}_{\text{statisch}}$ longitudinal

(iii) $$\underline{E}_{\text{dynamisch}} = \underset{\underset{-\dot{\underline{A}}}{\uparrow}}{\underline{E}_t} + \underset{\underset{-\underline{\nabla}\phi}{\uparrow}}{\underline{E}_l}$$

(Coulomb-Eichung)

allgemeine Lösg: d'Alembertsche Lösg $\underline{A}(\underline{r},t) = \sum_j = \underline{F}_j(\underline{k}_j \cdot \underline{r} - \omega_j t)$

mit $\omega_j = v |\underline{k}_j|$

Anwendungen:

a) Interferenz ebener Wellen

b) Wellenpakete

c) elektromagnetische Wellen in Materie (Isolator)

a) Interferenz ebener Wellen (lineare Überlagerung)

(i) die gleiche Ausbreitungsrichtung (z.B. x-Richtung), gleiche Frequenz ω
gleiche Phasengeschwindigkeit

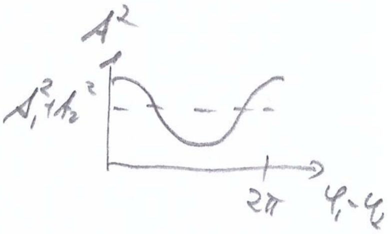
$$\phi_j(x,t) = a_j e^{i(\omega t - kx)} \quad , \quad a_j = A_j e^{i\varphi_j}$$ Komplexe Amplitude $j=1,2$

$A_j \in \mathbb{R}_+$

$$\Rightarrow \phi(\cancel{x}t) = \phi_1 + \phi_2 = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{= A e^{i\varphi}} e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\text{mit } A^2 = (a_1 + a_2)(a_1^* + a_2^*) = \left(A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}\right)\left(A_1 e^{-i\varphi_1} + A_2 e^{-i\varphi_2}\right)$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 \left(e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)}\right)$$



$$= A_1^2 + A_2^2 \underbrace{+2A_1}_{} A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\leqq A_1^2 + A_2^2 \text{ , da } A_1^2 + A_2^2 - 2A_1 A_2 = (A_1 - A_2)^2 \geq 0$$

$$\text{und } \tan\varphi = \frac{\mathrm{Im}(a_1 + a_2)}{\mathrm{Re}(a_1 + a_2)} = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$$

↳ Auslöschung für $A = 0 \Rightarrow A_1 = A_2 \wedge \varphi_1 = \varphi_2 + (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{N}$

↳ $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -1$ (gegenphasig)

b) entgegengesetzte Ausbreitungsrichtungen:

$$\phi_1 = a_1 e^{i(\omega t - kx)} \quad , \quad \phi_2 = a_2 e^{i(\omega t + kx)} \quad , \quad a_j = A_j e^{i\varphi_j}$$

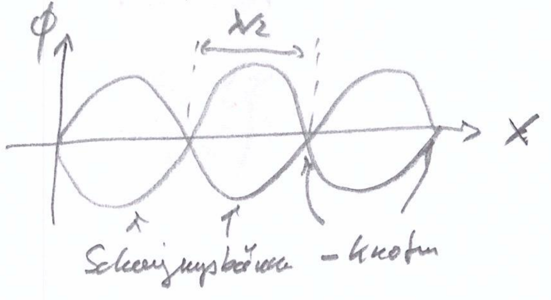
$$\Rightarrow \phi(x,t) = \phi_1 + \phi_2 = e^{i\omega t}\left[A_1 e^{i\varphi_1 - ikx} + A_2 e^{i\varphi_2 + ikx} \overbrace{- A_2 e^{i\varphi_1 - ikx} + A_2 e^{i\varphi_1 - ikx}}^{=0}\right]$$

$$= (A_1 - A_2) e^{i(\omega t - kx + \varphi_1)} + A_2 e^{i\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)} \underbrace{\left[e^{i\left(kx - \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)} + e^{-i\left(kx - \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)}\right]}_{2\cos\left(kx - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)}$$

= laufende Welle

stehende Welle

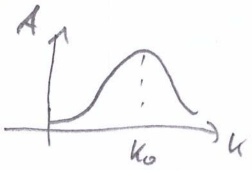
↳ $A_1 = A_2$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0 \Rightarrow \phi(x,t) = 2A\cos(\omega t)\cos(kx)$



(b) Wellenpakete

lineare Superposition ebener Wellen mit gleicher Ausbreitungsrichtung, aber verschiedenem k: $\phi(x,t) = \int dk\, A(k)\, e^{i(kx-\omega t)}$, $\omega = \omega(k)$

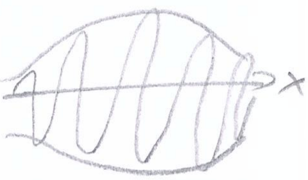
↳ Sei $A(k)$ lokalisiert um k_0, dann heißt $\phi(x,t)$ ein Wellenpaket.



↳ Entwicklung der Phase $(kx-\omega t)$ um k_0: $\omega(k) = \underbrace{\omega(k_0)}_{\omega_0} + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} \underbrace{(k-k_0)}_{=\bar{k}} + \ldots$ $\Rightarrow k = \bar{k} + k_0$

$$\Rightarrow \phi(x,t) \approx \int d\bar{k}\, A(k_0+\bar{k})\, e^{i\left[(\bar{k}+k_0)x - \left(\omega_0 + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0}\bar{k}\right)t\right]}$$

$$= \underbrace{e^{i(k_0x-\omega_0 t)}}_{\text{Trägerwelle}} \underbrace{\int d\bar{k}\, A(\bar{k}+k_0)\, e^{i\bar{k}\left(x - \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} t\right)}}_{\tilde{A}(x,t)\ \text{Einhüllende}}$$



Phasengeschwindigkeit der Trägerwelle: $v_{ph} = \frac{\omega_0}{k_0}$

Gruppengeschwindigkeit des Wellenpakets $v_g = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{\tilde{A}=\text{const}} = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0}$

(Geschwindigkeit | des Maximums der Einhüllenden
| des Schwerpunkts des Wellenpakets)

↳ $\omega(k) = v k \Rightarrow v_{ph} = v_g = v$

↳ $\omega(k) = v(k)\, k$: Partialwellen (verschiedene k) breiten sich verschieden schnell aus.

↳ Dispersion

$$v_{ph} = \frac{\omega(k_0)}{k_0} = v(k_0),\quad v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} = \left[v(k) + k\frac{dv}{dk}\right]_{k_0} = v_{ph} + k_0\left.\frac{dv}{dk}\right|_{k_0}$$

normale Dispersion: $v_g < v_{ph}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{dn}{dk}\Big|_{k_0} < 0$

anomale Dispersion: $v_g > v_{ph}$

keine Dispersion: $v_g = v_{ph}$

(c) elektromagnetische Wellen (im Isolator)

$$\Delta \underline{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{E} = 0 \text{ mit } v^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu} = \frac{c^2}{n^2}$$

↳ $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$ Brechungsindex

↳ Vakuum: $n = 1$ $\Rightarrow$ $v = c = v_{ph} = v_g$

↳ in dispersiven Medien: n hängt von ω (bzw. k) ab

$$\frac{dv}{dk} = c \frac{d}{dk} \frac{1}{n} = -\frac{c}{n^2} \frac{dn}{dk} \begin{array}{l} < 0 \text{ normal} \\ > 0 \text{ anomal} \end{array}$$

$$\Rightarrow v_g = v_{ph} - k_0 \frac{c}{n^2} \frac{dn}{dk} \longrightarrow$$

$v_g > c$ möglich,

aber $v_{\text{Signal}} \leq c$!

d) Fourier-Darstellung von Wellenpaketen:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\, e^{ikx}\, dk \quad , \quad \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx$$

Fourier-Integral

Fourier-Transformierte $\mathcal{F}[f]$

$\mathcal{F}: f \rightarrow \hat{f}$

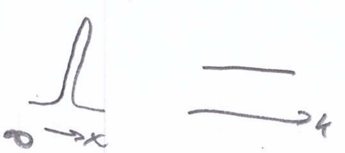
Eigenschaften:

↳ linear

↳ Multiplikationssatz $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} dk\, \hat{f}(k) \frac{d}{dx} e^{ikx}$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left[\frac{d}{dx} f(x)\right] = i k \hat{f}(k)$$

↳ δ-Funktion: $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx}$



↳ $\hat{y}(k) = \hat{f}(k)\, \hat{g}(k)$ $\Rightarrow$ $\underset{\uparrow}{y(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x-x')\, g(x')$ Faltung

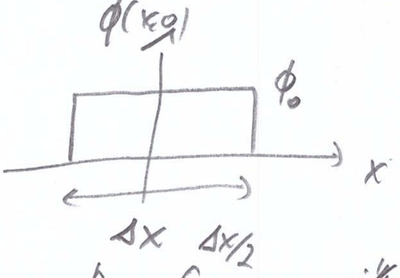
$= (g * h)(x)$

Wellenpaket:

Zunächst: $t=0$ $\quad \phi(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, A(k)\, e^{ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \hat{\phi}(k)\, e^{ikx}$

$$\hat{\phi}(k) = \sqrt{2\pi}\, A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi(x,0)\, e^{-ikx}$$

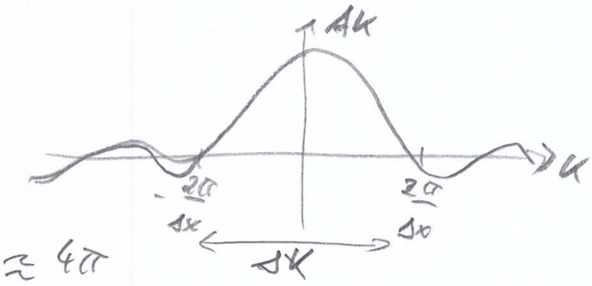
Bsp:



$$A(k) = \frac{\phi_0}{2\pi} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} dx\, e^{-ikx} = \frac{\phi_0}{2\pi} \left. \frac{e^{-ikx}}{-ik} \right|_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\Delta x/2}$$

$$= \frac{\phi_0}{\pi} \frac{e^{-ik\frac{\Delta x}{2}} - e^{ik\frac{\Delta x}{2}}}{-2ik} = \frac{\phi_0}{\pi} \frac{\sin\left(k\frac{\Delta x}{2}\right)}{k}$$

$$= \frac{\phi_0 \Delta x}{2\pi} \frac{\sin\left(k\frac{\Delta x}{2}\right)}{k\frac{\Delta x}{2}}$$



Unschärferelation $\quad \Delta x \cdot \Delta k \approx 4\pi$

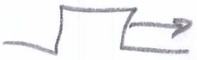
$\uparrow$ Breite im k-Raum $\approx \frac{4\pi}{\Delta x}$

$\Rightarrow$ Je schärfer im Ortsraum lokalisiert, desto breiter im k-Raum

zeitliche Entwicklung: $\phi(x,t) = \int^{\infty} dk\, A(k)\, e^{i(kx-\omega t)}$

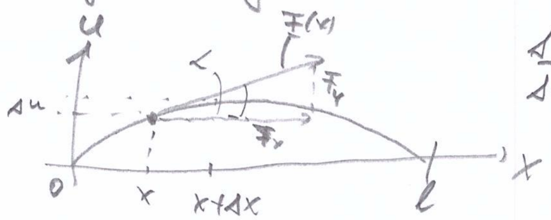
ohne Dispersion: $\omega = vk$: $\quad \phi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, A(k)\, e^{ik\underbrace{(x-vt)}_{\tilde{x}}} = \phi(x-vt,0)$

$\Rightarrow$ Wellenpaket behält seine Form



mit Dispersion: $\quad \omega = v(k)\, k$: Wellenpaket fließt auseinander (Δx wächst mit t)

- Eigenschwingung einer Saite (ideal biegsam, kleine Auslenkung)



$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \tan\alpha \approx \sin\alpha$$

$$F_{total} = F_y(x+\Delta x) - F_y(x) = F \left(\sin\alpha\big|_{x+\Delta x} - \sin\alpha\big|_x\right) \approx F\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\Big|_{x+\Delta x} - \frac{\Delta u}{\Delta x}\Big|_{x}\right)$$

[illegible] [illegible]

$$\xrightarrow{\Delta x \to 0} F_{tot} = F\left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+dx}}_{\frac{\partial u}{\partial x}\big|_x + \frac{\partial u}{\partial x}\big|_x dx} - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x\right) = F\,dx\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = m\frac{\partial^2}{\partial t^2}u$$

$$m = \rho q\,dx$$

q ↑ Querschnitt

$$\Rightarrow u_{xx} - \frac{1}{v^2}u_{tt} = 0 \quad \text{mit } v = \sqrt{\frac{F}{\rho q}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}},\ \sigma\text{: Spannung}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u = 0$$

Randbedingung: $u(0,t) = u(l,t) = 0$ Anfangsbed.: $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = 0$

Start in Ruhe

Trennung der Variablen: $u(x,t) = f(x)\,T(t)$

aus Randbed.: $\left.\begin{array}{l} f(0)\,T(t) = 0 \\ f(l)\,T(t) = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\forall t} f(0) = f(l) = 0$

G Einsetzen: $f''\,T = \frac{1}{v^2} f\,\ddot{T} \xrightarrow{\forall x,t} \frac{f''}{f} = \frac{1}{v^2}\frac{\ddot{T}}{T} = -\lambda = \text{const.}$

$\Rightarrow$ $f''(x) + \lambda f(x) = 0$ Randwertproblem

$\ddot{T}(t) + \lambda v^2 T(t) = 0$ Anfangswertproblem

→ Eigenwertproblem: λ: Eigenwert

(i) $\lambda = 0$: $f'' = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x) = Ax + B \\ f(0) = B \overset{!}{=} 0 \\ f(l) = Al = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \equiv 0 \Rightarrow$ kein Eigenwert

(ii) $\lambda \neq 0$ $f'' + \lambda f = 0$

Ansatz: $f(x) = e^{\alpha x} \Rightarrow \alpha^2 e^{\alpha x} + \lambda e^{\alpha x} = 0 \Rightarrow \alpha = \pm i\sqrt{\lambda}$

$\Rightarrow f(x) = C_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-i\sqrt{\lambda}x}$

$= a\cos(\sqrt{\lambda}x) + b\sin(\sqrt{\lambda}x)$ für $\lambda > 0$

$\hookrightarrow \Lambda<0$: $f(x)=C_1 e^{\alpha x}+C_2 e^{-\alpha x}$ mit $\alpha=\sqrt{-\Lambda}>0$

$$\hookrightarrow f(0)=C_1+C_2\overset{!}{=}0$$

$$f(l)=C_1 e^{\alpha l}+C_2 e^{-\alpha l}=C_1\underbrace{\left(e^{\alpha l}-e^{-\alpha l}\right)}_{2\sinh(\alpha l)\neq 0}\overset{!}{=}0$$

$\Rightarrow C_1=0\Rightarrow C_2=0\Rightarrow f\equiv 0\Rightarrow \Lambda<0$ kein Eigenwert

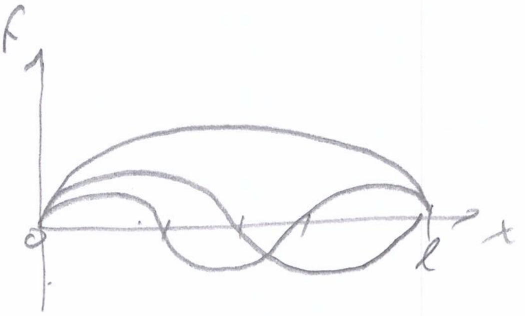
Bleibt: $\Lambda>0$:

$$f(0)=a\overset{!}{=}0$$

$$f(l)=b\sin(\sqrt{\Lambda}\,l)\overset{!}{=}0\underset{b\neq 0}{\Rightarrow}\sqrt{\Lambda}\,l=n\pi,\ n=1,2,3\ldots$$

diskretes Spektrum: $\Lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ $n\in\mathbb{N}$ Eigenwerte (kleinster Eigenwert $\Lambda_1=\left(\frac{\pi}{l}\right)^2$)

$\hookrightarrow f_n(x)=b_n\sin\left(\underbrace{\frac{n\pi}{l}}_{k_n}x\right)$ Eigenlösungen



Zeitabhängiger Teil der Wellengleichung: $\ddot{T}+\Lambda_n v^2 T=0$

$$\Rightarrow T_n(t)=A_n\cos\left(\underbrace{\frac{n\pi}{l}v}_{\omega_n}t\right)+B_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}vt\right)$$

$$\Rightarrow \text{Lösg: } u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\,T_n(t)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left[A_n\cos\left(\frac{n\pi}{l}vt\right)+B_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}vt\right)\right]}_{\text{stehende Welle}}\underbrace{\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)}_{\text{für Randbed.}}$$

Bestimmung von A_n und B_n durch Anfangsbed.:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \overset{!}{=} \varphi(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi}{l} v \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \overset{!}{=} \psi(x)$$

} Fourier-Reihen auf endlichem Intervall $[0,l]$

$$\Rightarrow A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

Fourierkoeffizienten

$$v\frac{n\pi}{l}B_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

- $u(x,t)$: Überlagerung stehender Wellen mit $\omega_n = n\left(\frac{\pi}{l}v\right)$

  Grundton: $\omega_1 = \frac{\pi}{l}v$

  Obertöne (Harmonische): $\omega_n = n\omega_1$ $(n \geq 2)$

  ↑ Anregung hängt von Anfangsbeding. ab

- einseitiges Auslenken $\varphi(x) > 0$ $\Rightarrow A_1 = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)dx > 0$

Grundton schwingt mit

- Flageolett-Töne $\varphi(x)$ $\Rightarrow$ $A_1 = 0$, $B_1 = 0$ } tiefste Frequenz: $2\omega_1$

$u_t(x,0) = 0$ → $B_1 = 0$

mathematische Klasse von Eigenwertproblem:

Sturm-Liouvillesches Eigenwertproblem:

$$Lf := [p(x) f'(x)]' - q(x) f(x) = -\lambda \rho(x) f(x)$$

mit $f(0) = f(l) = 0$, $p(x) > 0$ $\rho(x) \neq 0$

$\Rightarrow$ (i) $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ mit $f_1(x), f_2(x), \ldots$ (iii) $\int_0^l f_m(x) f_n(x) \rho(x) dx = 0,\ m \neq n$

Orthogonal

(ii) $f_n(x)$ hat $n-1$ Knoten

- Eigenschwingung einer kreisförmigen Membran:

2D-Wellengleichung: $u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{v^2} u_{tt}$, $v = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$

↳ Polarkoordinaten: $x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

Randbedingung: $u(r=l, \varphi, t) = 0 \qquad \forall \varphi, t$

Anfangsbed.: $u(r, \varphi, 0) = \xi(r, \varphi)$

$u_t(r, \varphi, 0) = \psi(r, \varphi)$

(Lösung nicht unbedingt Zylindersymmetrisch)

Separationsansatz: $u(r, \varphi, t) = f(r, \varphi)\, T(t)$

↳ $\Delta f \cdot T = \frac{1}{v^2} f\, \ddot{T}(t)$

$\Rightarrow \frac{\Delta f(r,\varphi)}{f(r,\varphi)} = \frac{1}{v^2} \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\Lambda$

Zeitanteil: $\ddot{T}(t) + \Lambda v^2 T(t) = 0$

$\Rightarrow T(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, $\omega = \sqrt{\Lambda}\, v = kv$

Ortsanteil: $\Delta f(r, \varphi) + \underbrace{k^2}_{\Lambda} f(r, \varphi) = 0$, $f(l, \varphi) = 0$

Laplace-Operator in Polarkoordinaten: $\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} f + \frac{\partial^2}{\partial r^2} f + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} f$

$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} f + \frac{\partial^2}{\partial r^2} f + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} f + k^2 f = 0$

Separationsansatz: $f(r, \varphi) = R(r)\, \phi(\varphi)$

↳ $\frac{R}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\phi + \phi\left(\frac{d^2}{dr^2}R + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + k^2 R\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{\frac{d^2}{d\varphi^2}\phi}{\phi} = -\frac{1}{R}\left(r^2\frac{d^2}{dr^2}R + r\frac{dR}{dr} + k^2 r^2 R\right) = -\lambda^2 = \text{const}$

Winkelanteil: $\phi'' + \lambda^2 \phi = 0$, $'' \hat{=} \frac{d^2}{d\varphi^2}$

Radialanteil: $r^2 R'' + r R' + (k^2 r^2 - \lambda^2) R = 0$, $'' \hat{=} \frac{d^2}{dr^2}$, $' \hat{=} \frac{d}{dr}$

Winkelanteil: $\phi(\varphi) = C \cos(\lambda \varphi + \varphi_0)$ mit $\lambda = m \in \mathbb{N}$ wegen 2π-Periodizität $\phi(\varphi) = \phi(\varphi + 2\pi)$

Radialanteil: $r^2 R'' + r R' + (k^2 r^2 - \lambda^2) R = 0$

Substitution $x := kr$ liefert $\left(\begin{array}{l} R' = \frac{dR}{dx}\frac{dx}{dr} = k \frac{dR}{dr} \\ R'' = k^2 \frac{d^2R}{dx^2} \end{array} \right)$

$$x^2 \frac{d^2R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} + (x^2 - \lambda^2) R = 0$$ Besselsche Dgl.

Lösungsansatz: $R(x) = x^\rho \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s x^s$

$\hookrightarrow R'(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s (\rho + s) x^{\rho + s - 1}$

$\hookrightarrow R''(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s (\rho + s)(\rho + s - 1) x^{\rho + s - 2}$

Einsetzen und Sortieren nach Potenzen von x:

x^ρ : $\alpha_0 [\rho^2 - \lambda^2] = 0$ $\Rightarrow$ $\rho = \pm \lambda$

$x^{\rho+1}$: $\alpha_1 [(\rho+1)^2 - \lambda^2] = 0$ $\Rightarrow \alpha_1 = 0$

$x^{\rho+s}$: $\alpha_s [(\rho+s)^2 - \lambda^2] + \alpha_{s-2} = 0$ $(s \geq 2)$

$$\hookrightarrow \alpha_s = \frac{\alpha_{s-2}}{\lambda^2 - (\pm\lambda + s)^2} = \frac{\alpha_{s-2}}{s(\mp 2\lambda - s)}$$

Rekursionsformel!
(alle ungeraden Potenzen verschwinden wegen $\alpha_1 = 0$)

Festlegung: $\alpha_0 := \frac{1}{2^\lambda \lambda!}$: Besselfunktionen $(\lambda = m \in \mathbb{N})$

$$J_m(x) = x^m \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s x^s \underset{\underset{\alpha_s = -\frac{\alpha_{s-2}}{s(2m+s)}}{\uparrow}}{\underset{s=2\nu}{=}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!(m+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2\nu}$$

[weitere unabhängige Lösung: $N_m(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda} J_\lambda(x) - (-1)^m \frac{\partial}{\partial\lambda} J_{-\lambda}(x)\right]$
(Neumannsche Funktion)

$\hookrightarrow R(r) = C_1 J_m(kr) + C_2 N_m(kr)$ (hier: $C_2 = 0$
sonst $N_m(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$]

Randbed.: $R(l) = 0 \Rightarrow J_m(kl) = 0$

Aber: $J_m(x)$ hat unendlich viele Nullstellen: $x = \mu_n^m$ – Indexe!

$\Rightarrow kl = \frac{\omega}{v} l = \mu_n^m \Rightarrow$ Eigenfrequenzen: $\omega_n^m = \frac{v}{l}\mu_n^m$

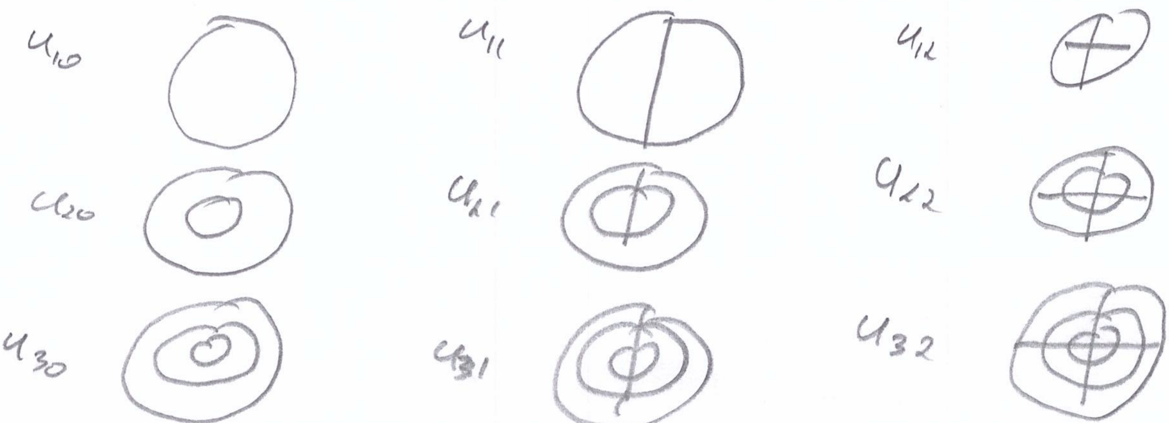
$\Rightarrow$ allgemeine Lösung:

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{nm}(r,\varphi,t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} T_{nm}(t)\,\Phi_m(\varphi)\,R_{nm}(r)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \left(A_{nm}\cos(\omega_n^m t) + B_{nm}\sin(\omega_n^m t)\right)\cos(m\varphi + \varphi_0)\,J_m(k_n^m r)$$

Knotenlinien:



Eigenfrequenzen im nicht rationalen Verhältnis ⇒ Geräusche! Kein Ton!