

2.7 Das Zweikörperproblem

22

Idee: Herleitung der Bewegungsgleichung über Reduzierung der Freiheitsgrade / Identifizierung der Integrale der Bewegung / Erhaltungsgroßen

Allgemein: f Freiheitsgrade $\Rightarrow f$ DGL 2. Ordnung $\Rightarrow 2f$ Integrationskonstanten (Anfangsbedingungen)
 $\Rightarrow$ max. $2f$ Integrale der Bewegung
 $\uparrow$
(dann wäre Problem gelöst: $I_r(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = C_r, r=1, \dots, f$)

Hier: **Zweikörperproblem**: 2 Massen m_1, m_2 mit innerer Wechselwirkung

$V(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)$: **Zentralpotential**

(Sonn-erde, Erde-Mond)

$\Rightarrow f = 6 \Rightarrow 12$ Integrale der Bewegung möglich

(i) $V(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)$ translationsinvariant

$$\Rightarrow \underline{P} = \underline{P}_1 + \underline{P}_2 = \text{const} \quad (\text{Impuls } \underline{P} = M \underline{\dot{R}})$$

$$\Rightarrow \text{Schwerpunkt: } \underline{R} = \frac{1}{M} \underline{P} t + \underline{R}_0, \quad M = m_1 + m_2$$

$\Rightarrow$ Schwerpunkt bewegt sich geradlinig und gleichförmig

$\Rightarrow 6$ Integrationskonstanten $\underline{P}, \underline{R}_0$

(ii) $V(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)$ rotationsinvariant

$$\Rightarrow \underline{L} = m_1 \underline{r}_1 \times \dot{\underline{r}}_1 + m_2 \underline{r}_2 \times \dot{\underline{r}}_2 = \text{const} \quad (\text{Drehimpuls})$$

$\Rightarrow 3$ Integrationskonstanten $\underline{L}$

(iii) zeitliche Translationsinvariant, konservativer Kraft

$$\Rightarrow \underline{E} = \frac{1}{2} m_1 \dot{\underline{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\underline{r}}_2^2 + V(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) = \text{const} \quad (\text{Energie})$$

$\Rightarrow 1$ Integrationskonstante $\underline{E}$

$\Rightarrow 10$ Integrale der Bewegung identifiziert

$\Rightarrow$ Es bleiben $12 - 10 = 2$ Integrationskonstanten (Nullpunkt von Zeit- & Winkelstöße)