

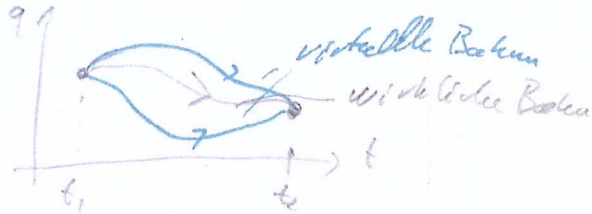
3. Das Hamiltonsche Prinzip

32

3.1 Variationsprinzip

Bisher: differenzierbare Variation $\delta r_i \rightarrow$ D'Alembertsches Prinzip

Nun: Variation der ganzen Bahn $\rightarrow$ Hamiltonsches Prinzip



Idee: Die wirklich ausgeführte Bahn zeichnet es aus dadurch aus, dass
sei eine konstante Größe („Wirkung“) extremalwertig.

Allgemein: Sei $I: C^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktional
 $q(t) \mapsto I[q] := \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$

Suche $q(t)$, so dass $\delta I[q] = 0$ (extremal!)

Anforderung für varierte Bahnen:

Zu jedem t aus $t_1 \leq t \leq t_2$ wird dem Punkt $q(t)$ auf der
realen Bahn ein variierter Bahnepunkt $q'(t)$ zugeordnet:

(i) $q'(t) \in C^2$ (2mal differenzierbar)

(ii) $\delta q(t) = q'(t) - q(t)$ differenzielle Variation

(iii) $\delta t = 0$

Zeit bleibt invariant

(iv) $q'(t_1) = q(t_1)$

$q'(t_2) = q(t_2)$

Aufgabs- / Punkte fest $\Rightarrow \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$
Ende

a) Extremum einer Funktion $f(x)$ einer Variable:

$$\delta f(x) = f(x+\delta x) - f(x) = \frac{df}{dx} \delta x \quad \delta x = 0 \quad \text{für beliebige } \delta x \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = 0 \quad \text{bei } x = x^* (\text{Extremum})$$

b) Extremum einer Funktion $f(x_1, \dots, x_N)$ mehrerer Variablen:

$$\delta f = f(x_1 + \delta x_1, \dots, x_N + \delta x_N) - f(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \quad \text{für bel. } \delta x_i$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad i=1, \dots, N \quad \text{bei } x_i = x_i^* (\text{Extremum})$$

c) Extremum eines **Funktional** $f[x] \equiv f[x(t)]$ ($= f(x(t))$)

$$x_1, \dots, x_N \rightarrow x(t)$$

$$x_i^* \rightarrow x^*(t)$$

$$\delta x_1, \dots, \delta x_N \rightarrow \delta x(t)$$

$$\delta f = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i \rightarrow \delta f = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta f}{\delta x(t)} \delta x(t) dt$$

Funktional ableitung

$$\hookrightarrow f[x] = \int_{t_1}^{t_2} dt \, F(x(t))$$

$$\Rightarrow \delta f = f[x(t) + \delta x(t)] - f[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ F(x(t) + \delta x(t)) - F(x(t)) \right\}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\frac{dF}{dx}}_{\frac{\delta f}{\delta x(t)}} \delta x(t) = 0 \quad \text{für beliebige } \delta x(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta f}{\delta x(t)} = \frac{dF}{dx} = 0 \quad \text{bei } x(t) = x^*(t) (\text{Extremum})$$

partielle Integration

$$\text{Bsp: } f[x, \dot{x}] = \int_{t_1}^{t_2} dt \, F(x(t), \dot{x}(t))$$

$$\Rightarrow \delta f = \int_{t_1}^{t_2} dt \, \delta F(x(t), \dot{x}(t)) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right\} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right\} \delta x(t)$$

$$\Rightarrow \text{Extremum: } \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (\text{Euler-Lagrange-Gleichung für } x(t))$$

Auswerten auf $q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)$:

$$0 = \delta I[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \, \delta \bar{T}(q, \dot{q}, t) \stackrel{(iv)}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \, \delta \bar{T}(q, \dot{q}, t) \stackrel{(iii)}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right]$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{\partial \bar{T}}{\partial q} \delta q + \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}$$

$$\stackrel{\text{partielle Int.}}{=} \left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q$$

= 0

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial \bar{T}}{\partial q} - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}} \right) \right\} \delta q$$

frei variieren

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{T}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}} = 0$$

Fazit: Differenzialgleichung ist äquivalent zum Integralprinzip $\delta I[q] = 0$

3.2 Hamiltonsches Wirksprinzip

Annahmen:

(i) Holonom Zwangsbedingungen $\rightarrow$ generalisierte Koord. $q_1, \dots, q_f$

(ii) Konserватive Kräfte $\rightarrow$ Lagrange-Funktion $L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) = T - V$

Idee: (a) $T = L$ (b) Verallgemeinerung auf vektorielle Variablen $x \rightarrow q_1, \dots, q_f$
 $\dot{x} \rightarrow \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f$

$\Rightarrow$ Euler-Lagrange-DGL $\hat{=}$ Lagrange-Gleichung 2. Art

Integralprinzip $\delta I = 0 \quad \hat{=}$ Hamiltonsches Wirksprinzip $\delta W = 0$

Wirkungsfunktional $W = \int_{t_1}^{t_2} dt \, L(q_1(t), \dots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_f(t), t)$

Berechnung:

$$0 = \int W = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^f \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \dot{q}_k(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} \dot{q}_k(t) \right\}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^f \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right\} \dot{q}_k(t)$$

Für beliebige Variationen $\delta q_k(t)$, $k=1, \dots, f$ folgt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$$

Bsp: 1-dimensionaler harmonischer Oszillator

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

$$\Rightarrow \int W = \int_{t_1}^{t_2} dt \int \left\{ \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \right\}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ m \dot{q} \delta \dot{q} - m \omega^2 q \delta q \right\}$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{partielle} \\ \text{Int.}}}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ -m \ddot{q} - m \omega^2 q \right\} \delta q$$

$$\Rightarrow \ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

Bem.: • Integralprinzip (betrifft ganze Bahn)

• teleologisch: auf ein Ziel gerichtet

• unabhängig von Koordinatenwahl

$$\bullet [Wirkung] = \underbrace{[Energie]}_{\frac{kg}{s^2}} \times \underbrace{[Zeit]}_s = \underbrace{[Impuls]}_{\frac{kg}{s}} \times \underbrace{[a.t]}_m$$

Vgl. Plancks Wirkungsquantum $[h] = Js$ ($h = 6,626 \cdot 10^{-34} Js$)
 $(\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,055 \cdot 10^{-34} Js)$

3.3 Eichtransformationen

36

Lagrange-Funktion nicht eindeutig durch Lagrange-Gleichung festgelegt.

Satz: Die **Eichtransformationen** $L \mapsto L' = L + \frac{d}{dt} M(q, t)$ mit beliebiger **Eichfunktion** M löst die Lagrange-Gleichung **invariant**.

Folgerung: $\delta \int L' dt = 0 \Leftrightarrow \delta \int L dt = 0$

Beweis: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} M(q, t) \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{d}{dt} M(q, t) \right)$

mit $\frac{d}{dt} M(q, t) = \sum_{l=1}^f \frac{\partial M}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial M}{\partial t}$ folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q_k} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{l=1}^f \frac{\partial M}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial M}{\partial t} \right)}_{= \frac{\partial M}{\partial q_k} \text{ (k darf nicht von } \dot{q}_k \text{ abhängen)}} - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{d}{dt} M(q, t) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Bsp: 1D harmonischer Oszillator:

$$L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{m}{2} \omega^2 q^2 \quad \text{und} \quad M(q) = \frac{m}{2} \omega^2 q^2 \Rightarrow \frac{d}{dt} M = m \omega^2 q \dot{q}$$

$$\Rightarrow L' = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{m}{2} \omega^2 (q^2 - 2q\dot{q})$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q} = m \ddot{q} + m \omega^2 \dot{q} - (-m \omega^2 q + m \omega^2 \dot{q}) \Rightarrow \ddot{q} + \omega^2 q = 0$$