

4. Das Hamiltonsche kanonische Formalismus

- §.1 Legendre-Transform
- §.2 Die Hamiltonschen Gleichungen
- §.3 Symplektische Strukturen des Phasenraums
- (§.4 Der Liouville'sche Satz)
- (§.5 Poincaré-Kleene)

Idee: Lagrange-Theorie: generalisierte Koordinaten $q_1, \dots, q_f$
und Geschwindigkeiten $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f$

$$\Rightarrow L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) \Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k}}_{\text{f Dgl's 2. Ordnung}} = 0, k=1, \dots, f$$

Hamilton-Formalismus: $(q_k, \dot{q}_k, t) \rightarrow (q_k, p_k, t)$

$$H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t) \Rightarrow \dots \Rightarrow \underbrace{\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}}_{\text{2f Dgl's 1. Ordnung}}$$

§.1 Legendre-Transformation

Idee: Für $y = f(x)$ soll $\exists$ u die Variable $\frac{df}{dx} = u$ verwendet werden
 $f'(u)$

Annahme: $\frac{df}{dx} = u$ umkehrbar (für $x = f'(u)$) $\Rightarrow \frac{d^2 f}{dx^2} \neq 0$

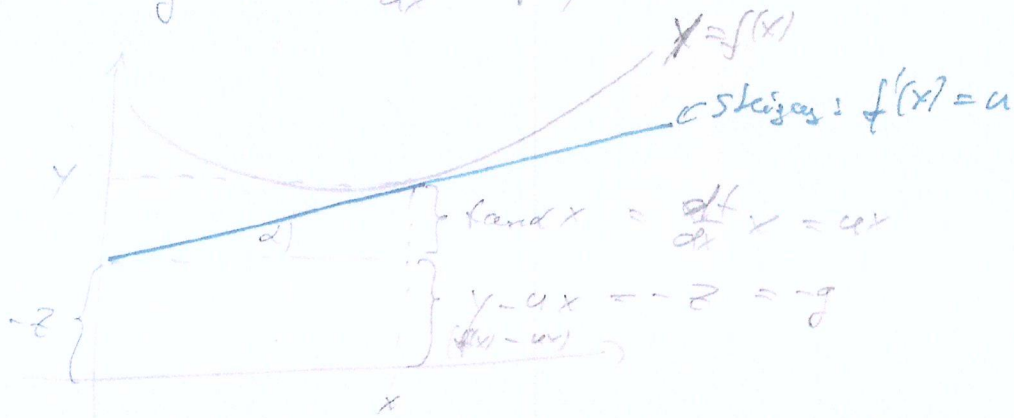
Achtung: $y = f(x) + a$ liefert auch dieselbe Steigung $\frac{df}{dx}$! 

$\Rightarrow$ Legendre-Transformation

$$x \rightarrow u = \frac{df}{dx}$$

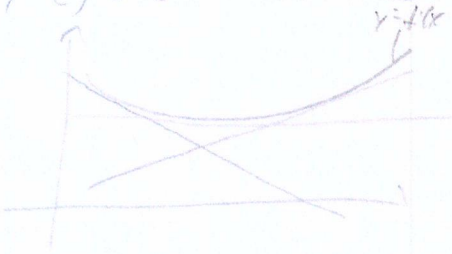
$$y \rightarrow z = x u - \underbrace{f(x)}_y = \varphi(u) u - f(\varphi(u)) \equiv g(u)$$

$$\Rightarrow g(u) = x \frac{df}{dx} - f(x)$$



Also: statt $y=f(x)$: Trafo $x \rightarrow u = \frac{df}{dx}$ und (negativer) Achsenabschnitt des Tangents ($-z$)

$(u, -z)$ bestimmen die Scheitelpunkte der Enveloppen



Analog auf $L(q, \dot{q}, t)$:

$$y=L, \quad x=\dot{q}, \quad u=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=p \Rightarrow z=\dot{q}p-L=H(q, p, t)$$

(ii) $L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \Rightarrow H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t) = \sum_{j=1}^f \dot{q}_j p_j - L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$$

(da $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_j} \neq 0$, lässt $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ nach $\dot{q}_k$ auflösen)

4.2 Die Hamilton'schen Gleichungen

39

Ziel: Bewegungsgleichungen für $q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f$:

$$H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t) = \sum_{j=1}^f \dot{q}_j p_j - L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$$

totaler Differential

$$\Rightarrow dH = \sum_{j=1}^f \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \right\} + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (\text{linke Seite})$$

$$= \sum_{j=1}^f \left\{ \underbrace{\dot{q}_j}_{\frac{\partial H}{\partial q_j}} dq_j + \underbrace{p_j}_{\frac{\partial H}{\partial p_j}} dp_j - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial L}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial L}{\partial t} dt}_{-dL} \right\} \quad (\text{rechte Seite})$$

Vergleich LS mit RS liefert:

$$dq_j: \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$dp_j: \frac{\partial H}{\partial p_j} = -\frac{\partial L}{\partial p_j} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{d}{dt} p_j = \dot{p}_j$$

$$dt: \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

Hamilton'sche Gleichungen

Bei zeitlicher Trennung (keine Zwangsbedingungen) (Allgemeine Zwangsbedingungen:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(q_1, \dots, q_f) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0)$$

$$\sum_{j=1}^f \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T \Rightarrow H = \sum_{j=1}^f \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = 2T - (T - V) = T + V$$

$$\Rightarrow H = T + V \quad \text{Gesamtenergie}$$

$\Rightarrow$ Energieerhaltung: $\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^f \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j \right\} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j \right)}_{=0} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

• allgemeine Zwangsbedingungen: $H \neq T + V$

Auswahlschema:

Kochrezept der Hamiltonschen Gleichungen:

1. Auswählen generalisierter Koordinaten: $q_1, \dots, q_f$
2. Transformation $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_f, t)$ und $\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_i(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$
3. Berechnen der Lagrange-Funktion $L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$
4. Berechnen der generalisierten Impulse $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$
und deren Umkehrung $\dot{q}_j = \dot{q}_j(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t)$
5. Legendre-Transformation $H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t) = \sum_{j=1}^f \dot{q}_j p_j - L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$
6. Aufstellung der Bewegungsgleichungen ($j = 1, \dots, f$):

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad \text{und} \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

7. Lösen der Bewegungsgleichungen

Bsp. a) 1 Teilchen im 3D-Kartesischen Koordinatensystem oder Zweifelsfrei:

(i) $\varphi_1 = r, \varphi_2 = \varphi, \varphi_3 = z$

(ii) $x = r \cos \varphi, \quad \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi$
 $y = r \sin \varphi, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi$
 $z = z, \quad \dot{z} = \dot{z}$

(iii) $T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2), \quad V = V(r, \varphi, z)$

$\Rightarrow L(r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}) = T - V$

(iv) $p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m}$ Radialimpuls

$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m r^2}$ z-Komponente des Drehimpulses (l_z)

$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \frac{p_z}{m}$ z-Komponente des Impulses

(v) $H = p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi} + p_z \dot{z} - L = \frac{1}{m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2 \right) - \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2 \right) + V(r, \varphi, z)$

$= \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2 \right) + V(r, \varphi, z)$

(vi) $\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \left(\frac{p_\varphi^2}{m r^3} - \frac{\partial V}{\partial r} \right)$ Radialpotential:
 $\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{m r^2}, \quad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}$
 $\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}, \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z}$
 $p_r = 0 \Rightarrow \dot{r} = 0$

$$\dot{p}_\varphi = 0 \Rightarrow \dot{p}_\varphi = m \dot{\varphi}^2 \dot{\varphi} = \text{const} \quad \text{Drehimpuls erhalten}$$

47

$$\dot{p}_z = 0 \Rightarrow p_z = \text{const} = 0 \quad (\text{ohne Bewegung})$$

(b) 1D harmonischer Oszillator

$$\text{ii) - (iii)} \quad L = \frac{m}{2} (\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)$$

$$\text{iv)} \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q}$$

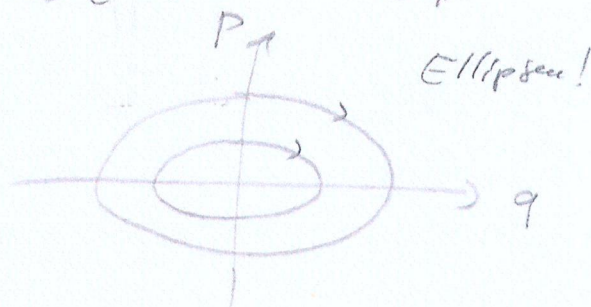
$$\text{v)} \quad H = p \dot{q} - L = \frac{p^2}{m} - \frac{m}{2} \left(\frac{p^2}{m^2} - \omega^2 q^2 \right) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 q^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0: \text{skleronomes System} \Rightarrow E = H = T + V = \text{const}$$

$$\Rightarrow \frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{\frac{2E}{m\omega^2}} = 1$$

Kreisbachform:

$$a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}, \quad b = \sqrt{2mE}$$



$$\text{vi)} \quad \left. \begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \end{aligned} \right\} \text{definiert Richtung in } (q, p)\text{-Ebene}$$