

5 Mechanik des starren Körpers

49

Idee: ausgedehnte, starre Körper (vgl. deformierbare Medien)
Elastomechanik / Hydrodynamik

↳ Def: Starrkörper:

(a) System von N Masspunkten mit festen Abständen
(↳ Zwangsbedingungen) $M = \sum_{i=1}^N m_i$

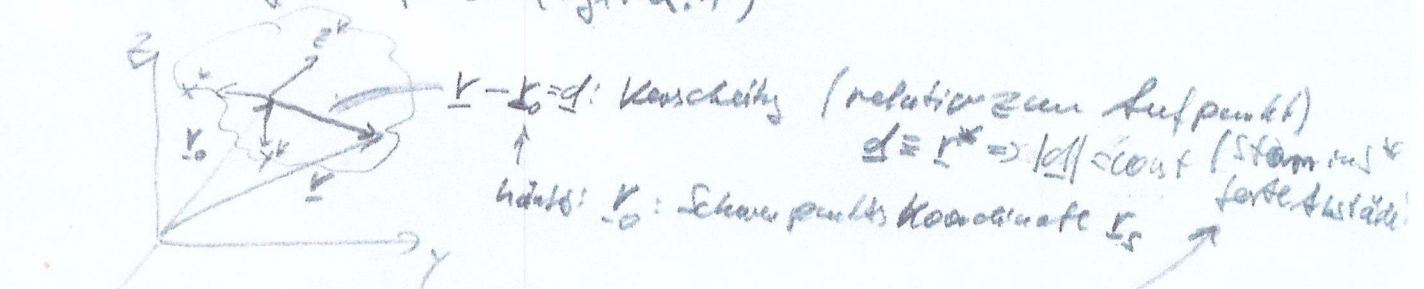
(b) vorgegeben, kontinuierliche Massenverfölg: $\rho(\mathbf{r})$,
(↳ Gesamtmasse: $M = \int \rho(\mathbf{r}) d^3r$)

Beschreibung: (i) **Raumfests Koordinatensystem** $S: (x, y, z), (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$
↳ Inertialsystem $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

(ii) **Körpers Koordinatensystem** $S^*: (x^*, y^*, z^*), (\mathbf{e}_x^*, \mathbf{e}_y^*, \mathbf{e}_z^*)$
↳ fest mit Körper / Kein Inertialsystem $(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*)$
↳ Ursprung: **Schwerpunkt** (kann gewählt sein)
(kann auch beliebigen Bezugspunkt sein)

(iii) **Schwerpunktsystem** $S': (x', y', z'), (\mathbf{e}_x', \mathbf{e}_y', \mathbf{e}_z')$
↳ translationale von S (gleiche Richtung)
($\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$)

Freiheitsgrade: $f=6$ (vgl. 2.1)



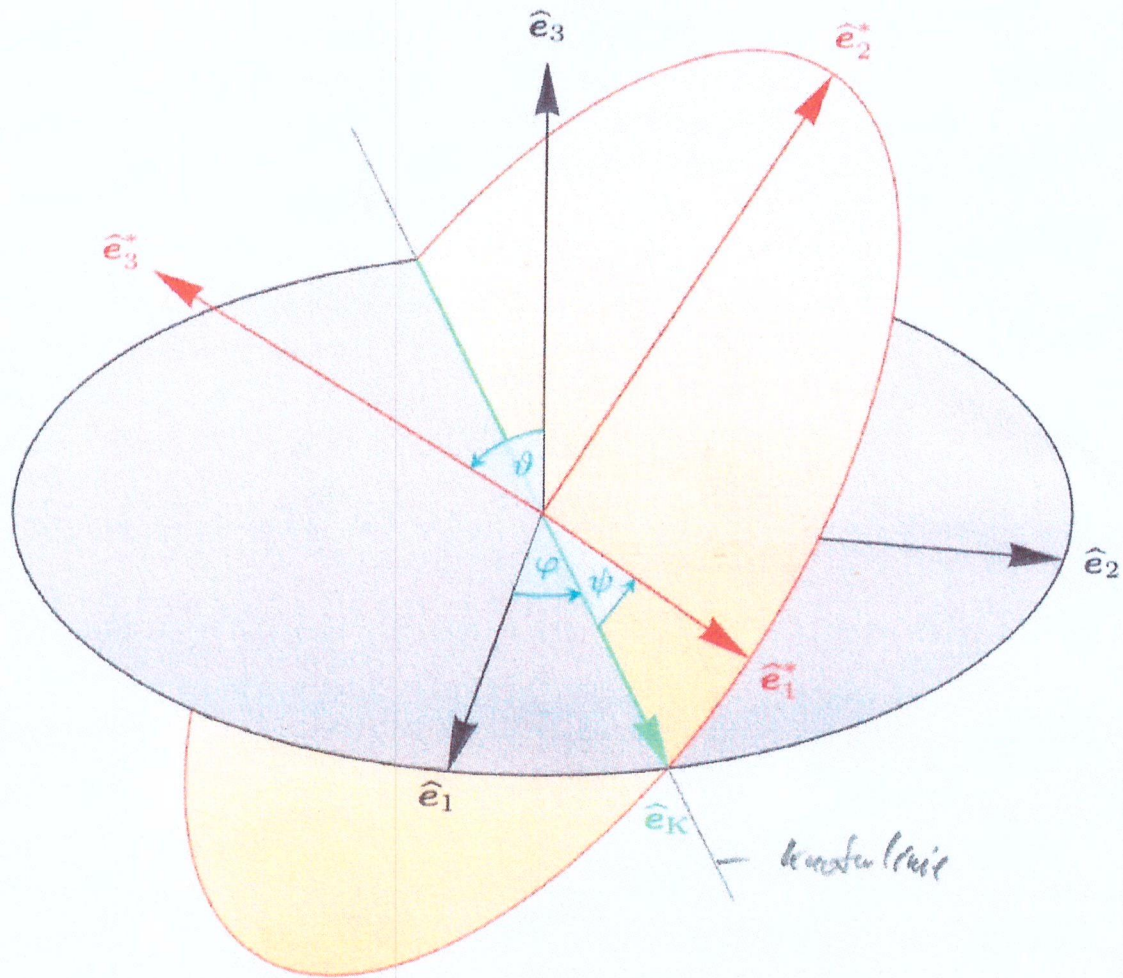
$$\Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{d} \quad |\mathbf{d}| = \text{const} \text{ nur Drehbewegung!}$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{d}} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}}$$

Schwerpunktsgeschw. Rotation um Drehachse
Aufpunkt gegeben durch $\boldsymbol{\omega}$

Bezieh: $S \rightarrow S^*$: Translation $S \rightarrow S'$, Rotation $S' \rightarrow S^*$ 408

Euler'scher Winkel: zur Beschreibung einer beliebigen Drehung $S' \rightarrow S^*$



φ : Winkel zwischen $\underline{e}_1$ und $\underline{e}_{k^*}$

ϑ : Winkel zwischen $\underline{e}_3$ und $\underline{e}_{2^*}$

ψ : — — — $\underline{e}_{1^*}$ und $\underline{e}_k$

$\Rightarrow$ (i) Drehung um φ (Z-Achse/ $\underline{e}_3$)

$$R_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
Z-Achse

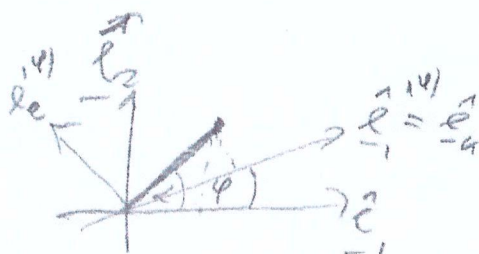
$\Rightarrow$ Basis system: $\underline{e}_1^{(1)}, \underline{e}_2^{(1)}, \underline{e}_3^{(1)} = \underline{e}_3$
 $\underline{e}_1^{(1)} = \underline{e}_k$

(ii) Drehung um ϑ (Knotenlinie, $\underline{e}_{k^*}$)

$$R_1(\vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
K-Achse
in 1. System

$\Rightarrow$ Basis system: $\underline{e}_1^{(2)}, \underline{e}_2^{(2)}, \underline{e}_3^{(2)}$
 $\underline{e}_1^{(2)} = \underline{e}_k$ $\underline{e}_3^{(2)} = \underline{e}_{2^*}$



Drehung um φ (z-Achse)

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \alpha \\ x_2 &= r \sin \alpha \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1' &= r \cos(\alpha - \varphi) = r (\cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi) \\ x_2' &= r \sin(\alpha - \varphi) = r (\sin \alpha \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_1' &= x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi \\ x_2' &= -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

