

5.1 Kinetische Energie & Trägheitstensor

45

(a) System von N Massenpunkten: Wähle: $r_0 = r_s$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\underline{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\underline{r}_0 + \underline{d}^{(i)} \right) \right]^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left[\dot{\underline{r}}_0 + \underline{\omega} \times \underline{d}_i^{(i)} \right]^2$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\underline{r}}_0^2}_M + \underbrace{\frac{2}{2} \dot{\underline{r}}_0 \cdot \sum_{i=1}^N m_i (\underline{\omega} \times \underline{d}_i^{(i)})}_{(\underline{r}_0 \times \underline{\omega}) \cdot \sum_{i=1}^N m_i \underline{d}_i^{(i)}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\underline{\omega} \times \underline{d}_i^{(i)})^2}_{\text{Rotationsenergie}}$$

Schwerpunkts-
energie

= 0 weil Schwerpunkt
im Ursprung von Σ^*

Nebenbed.: $(\underline{\omega} \times \underline{d})^2 = \omega^2 d^2 \sin^2 \alpha = \omega^2 d^2 (1 - \cos^2 \alpha)$
(skip (i))

$$= \omega^2 d^2 - \omega^2 d^2 \cos^2 \alpha$$

$$= \omega^2 d^2 - (\underline{\omega} \cdot \underline{d})^2 = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) - (\omega_1 d_1 + \omega_2 d_2 + \omega_3 d_3)^2$$

$$= \sum_{j,k=1}^3 \omega_j (d_j^2 \delta_{jk} - d_j d_k) \omega_k$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} M \dot{\underline{r}}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \omega_j \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i (d_j^{(i)2} \delta_{jk} - d_j^{(i)} d_k^{(i)})}_{\Theta_{jk}} \omega_k$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{\underline{r}}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \omega_j \Theta_{jk} \omega_k$$

Trägheitstensor

$$= \frac{1}{2} M \dot{\underline{r}}_0^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \underline{\Theta} \underline{\omega}$$

$$= T_{\text{Translation}} + T_{\text{Rotation}}$$

$\uparrow$
in Σ' System

(b) analog Hermitesche (Kartesisch):

46

$$T = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\underline{r}) (\dot{\underline{r}} + \underline{\omega} \times \underline{r})^2$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\int d^3r \rho(\underline{r})}_{M} \dot{\underline{r}}^2 + (\underline{r}_S \times \underline{\omega}) \cdot \underbrace{\int d^3r \rho(\underline{r}) \underline{r}}_{=0} + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \omega_j \Theta_{jk} \omega_k$$

mit $\Theta_{jk} = \int d^3r \rho(\underline{r}) [\underline{r}^2 \delta_{jk} - r_j r_k]$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} M \dot{\underline{r}}^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \underline{\Theta} \underline{\omega}$$

5.2 Eigenschaften des Trägheitstensors

$$\Theta_{jk} = \sum_{i=1}^N m_i (\underline{r}^{(i)2} \delta_{jk} - r_j^{(i)} r_k^{(i)})$$

$$\Rightarrow \underline{\Theta} = \sum_{i=1}^N m_i \begin{pmatrix} d_2^{(i)2} + d_3^{(i)2} & -d_1^{(i)} d_2^{(i)} & -d_1^{(i)} d_3^{(i)} \\ -d_2^{(i)} d_1^{(i)} & d_1^{(i)2} + d_3^{(i)2} & -d_2^{(i)} d_3^{(i)} \\ d_3^{(i)} d_1^{(i)} & -d_3^{(i)} d_2^{(i)} & d_1^{(i)2} + d_2^{(i)2} \end{pmatrix}$$

analog: $\underline{r} = (x_1, x_2, x_3)$

$$\underline{\Theta} = \int d^3r \rho(\underline{r}) \begin{pmatrix} x_2^2 + x_3^2 & -x_1 x_2 & -x_1 x_3 \\ -x_2 x_1 & x_1^2 + x_3^2 & -x_2 x_3 \\ -x_3 x_1 & -x_3 x_2 & x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix}$$

Klusterprüfung für TPI & für Lehramt

$\underline{\underline{\Theta}}$ ist ein Tensor 2. Stufe

↳ Transformationsmatrix für Drehungen:

Koordinaten: $x_\mu \rightarrow x'_\mu = \sum_{\nu=1}^3 R_{\mu\nu} x_\nu$

Drehmatrix in $\mathbb{R}^3$ ($\underline{\underline{R}}^{-1} \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{I}}$
 $\det \underline{\underline{R}} = 1$)

$\Rightarrow \Theta_{\mu\nu} \rightarrow \Theta'_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{\sigma=1}^3 R_{\mu\lambda} R_{\nu\sigma} \Theta_{\lambda\sigma}$

Kompakt: $\underline{\underline{x}} \rightarrow \underline{\underline{x'}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{x}}$

$\underline{\underline{\Theta}} \rightarrow \underline{\underline{\Theta'}} = \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{\Theta}} \underline{\underline{R}}$ (Ähnlichkeitstransf.)

Bsp.: 1. Stufe (Vektor) $A'_\mu = \sum_{\lambda=1}^3 R_{\mu\lambda} A_\lambda$

2. Stufe (Matrix) $A'_{\mu\nu} = \sum_{\lambda,\sigma=1}^3 R_{\mu\lambda} R_{\nu\sigma} A_{\lambda\sigma}$

n. Stufe $A'_{\mu_1 \dots \mu_n} = \sum_{\lambda_1, \sigma_1, \dots, \lambda_n, \sigma_n=1}^3 R_{\mu_1 \lambda_1} R_{\sigma_1 \lambda_2} \dots R_{\mu_n \lambda_n} A_{\lambda_1 \sigma_1 \dots \lambda_n \sigma_n}$

Transformationsnachweis: $\Theta_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^n m_i \left[\left(\sum_{\alpha=1}^3 x_\alpha^{(i)2} \right) \delta_{\mu\nu} - x_\mu^{(i)} x_\nu^{(i)} \right] = \dots = \Theta'_{\mu\nu}$

mit $x'_\mu = \sum_{\lambda=1}^3 R_{\mu\lambda} x_\lambda \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^3 x_\alpha'^2 = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{\sigma=1}^3 R_{\alpha\lambda} R_{\alpha\sigma} x_\lambda x_\sigma$

$= \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{\sigma=1}^3 \underbrace{\sum_{\alpha=1}^3 R_{\alpha\lambda} R_{\alpha\sigma}}_{\delta_{\lambda\sigma}} x_\lambda x_\sigma$
 $= \sum_{\lambda=1}^3 x_\lambda^2 \quad (\text{Invarianz})$

iii) $\sum_{\lambda,\sigma=1}^3 R_{\mu\lambda} R_{\nu\sigma} \delta_{\lambda\sigma} = \sum_{\lambda=1}^3 R_{\mu\lambda} R_{\nu\lambda}^T = \delta_{\mu\nu} \quad (\text{Invarianz})$

$\Rightarrow \sum_{\lambda,\sigma} R_{\mu\lambda} R_{\nu\sigma} \Theta_{\lambda\sigma} = \sum_{i=1}^n m_i \sum_{\lambda,\sigma} R_{\mu\lambda} R_{\nu\sigma} (x_\lambda^{(i)2} \delta_{\lambda\sigma} - x_\lambda^{(i)} x_\sigma^{(i)})$
 $= \sum_{i=1}^n m_i (x_\mu^{(i)2} \delta_{\mu\nu} - x_\mu^{(i)} x_\nu^{(i)}) = \Theta'_{\mu\nu}$ Tensor ist invariant.

$\underline{\Theta}$ ist diagonalisierbar durch eine orthogonale
Transformation $\underline{R} \in SO(3)$ (spezielle orthogonale Gruppe in $\mathbb{R}^3$,
alle Drehungen)

$$\underline{\Theta}' = \underline{R}^T \underline{\Theta} \underline{R} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix} \quad \text{d.h. gedrehtes Koordinatensystem!} \\ (y_1, y_2, y_3)$$

in Richtung der Hauptträgheitsachsen

$$\underline{\Theta}' = \int d^3y \, \rho(y) \begin{pmatrix} y_1^2 + y_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & y_1^2 + y_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & y_1^2 + y_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Theta_i \geq 0, \quad i=1,2,3$$

Diagonalisierung $\Rightarrow$ Eigenwertproblem: $\underline{\Theta} \hat{\underline{w}}^{(i)} = \Theta_i \hat{\underline{w}}^{(i)}$
 $\uparrow$
Hauptachsenträgheitsmomente
 (dann ist $\underline{\Theta}$ diagonal)

$$\Leftrightarrow \det(\underline{\Theta} - \Theta_i \underline{1}) = 0$$

$\Rightarrow$ 3 reelle, positive (semi-)definite Eigenwerte Θ_i .

$\underline{\Theta}$ ist linear in $\rho(r)$: additiv beim Zusammensetzen 2er Körper

Θ_i Hauptträgheitsmomente

$$\Theta_1 \neq \Theta_2 \neq \Theta_3 \quad \text{ausgewuchteter Körper}$$

$$\Theta_1 = \Theta_2 \neq \Theta_3 \quad \text{Symmetrie des Körpers (Axialsymmetrie)}$$

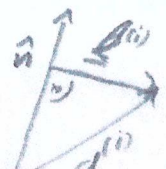
$$\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 \quad \text{"Kugelsymmetrie" (wählt man irgendwelche Kugel aus?)}$$

Trägheitsmoment

bzgl. Drehachse $\underline{w} = w \hat{n}$

$$\Theta_n = \sum_{i,j=1}^3 \hat{n}_i \Theta_{ij} \hat{n}_j = \hat{n}^T \underline{\Theta} \hat{n} = \sum_{i=1}^N m_i [\underline{d}^{(i)2} - (\underline{d}^{(i)} \cdot \hat{n})^2] \\ = \sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2$$

$$\Rightarrow T_{\text{kin,rot}} = \frac{1}{2} \Theta_n \omega^2$$



Satz von Steiner:

Sei O_{μ} der Trägheitsfokus im ebenen Schwerpunkt.

Zentriertes Körpersystem S , Sei S' die zu S achsenparallele, um a verschobenes System. Dann gilt:

$$\Theta' = \Theta_{\mu} + M(a^2 S_{\mu} - a_{\mu} a_{\nu})$$

(Trägheitsmoment bzgl. $\vec{n}$: $\Theta_n = \Theta_{\mu} + M l^2$, $l^2 = a^2 - (a \cdot \vec{n})^2$, $\Theta_n = \vec{n} \cdot \Theta \cdot \vec{n}$)

Beweis: Transformation $\underline{r} \rightarrow \underline{r}'$ mit $\underline{r}' = \underline{r} + \underline{a}$

Bsp.: Kugelsymmetrische Kernverteilung $\rho(r) = \rho(r)$

$$\Rightarrow \Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 =: \Theta$$

$$3\Theta = \sum_{i=1}^3 \Theta_i = \int dV \rho(r) \left[(x_2^2 + x_3^2) + (x_3^2 + x_1^2) + (x_1^2 + x_2^2) \right]$$

$$= 2 \cdot 4\pi \int_0^R dr r^4 \rho(r) \cdot 2r^2$$

$$\Rightarrow \Theta = \frac{8\pi}{3} \int_0^R dr r^4 \rho(r)$$

Für homogene Kernverteilung: $M = \underbrace{4\pi}_{V} \frac{R^3}{3} \rho(r)$

$$\Theta = \frac{2}{R^3} M \int_0^R dr r^4 = \frac{2}{5} MR^2$$

(ii) Abrollende Kugel:

Θ bzgl. einem Drehachsendurch A :

$$\Theta_A = \Theta + MR^2$$

$$= \frac{2}{5} MR^2 + MR^2$$

$$= \frac{7}{5} MR^2$$

