

2. Das d'Alembertsche Prinzip

6

2. D'Alembertsches Prinzip

1. Zwangsbedingungen und Zwangskräfte
2. Virtuelle Verrückungen
3. D'Alembertsches Prinzip der virtuellen Arbeit
4. Generalisierte Koordinaten
5. Lagrange-Gleichungen 2. Art

2.1 Zwangsbedingungen und Zwangskräfte

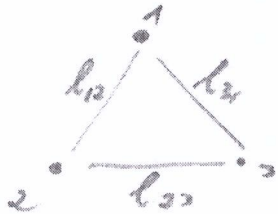
Ein System von N Massepunkten hat $f = 3N$ Freiheitsgrade, wenn keine Zwangsbedingungen vorliegen.

Idee: Verminderung der Zahl der Freiheitsgrade durch

ii) holonome Zwangsbedingungen ("integrabel"/ ganz gesetztlich)

$$f_M(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0, \quad M = 1, \dots, A \quad (\text{unabhängig: } \text{Rang} \left(\frac{\partial f_M}{\partial x_i} \right) = 1)$$

Bsp: Starrkörper aus 3 Teilchen



$$f_1 = |x_1 - x_2| - l_{12} = 0$$

$$f_2 = |x_2 - x_3| - l_{23} = 0$$

$$f_3 = |x_3 - x_1| - l_{31} = 0$$

Absstände fest

$$\Rightarrow f = 3N - A = 3 - 3 = 0$$

allgemein: Starrkörper aus N Teilchen: $f_M = |x_i - x_j| - l_{ij} = 0$

N	anzahl Gleichungen	A	$f = 3N - A$
1	0	0	3
2	1	1	5
3	2	3	6
4	3	6	$4 \cdot 3 - 6 = 6$
5	3	9	$5 \cdot 3 - 9 = 6$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$N \geq 4$	3	$3N - 6$	6

(2x Translation, 3x Rotation)



Die Bahn $r_i(t)$ sollen 1 unabhängige Zwangsbedingungen

7

erfüllen: $\int_M (\dot{r}_1(t), \dot{r}_2(t), \dots, \dot{r}_N(t)) dt = 0 \quad \forall t$

↳ Totale Zeitabhängigkeit: $\frac{dr_i}{dt}$

$$\frac{df_M}{dt} = \sum_{i=1}^N \underbrace{\nabla_{r_i} f_M}_{\text{Gradient}} \cdot \dot{r}_i + \frac{\partial f_M}{\partial t} = 0$$

↳ differenzielle Schreibweise: (vollständiges Differenzial)

$$df_M = \sum_{i=1}^N \nabla_{r_i} f_M \cdot dr_i + \frac{\partial f_M}{\partial t} dt = 0$$

(ii) nicht-holonomes Zwangsbedingungen

$$\sum_{i=1}^N \frac{a}{M_i} (\dot{r}_1, \dots, \dot{r}_N, t) \cdot dr_i + a_{M0} (\dot{r}_1, \dots, \dot{r}_N, t) dt = 0 \quad M=1, \dots, 1$$

Pfaffsche Differenzialform (nicht integrierbar, d.h. es existiert

kein integrierbarer Faktor g_M , so dass: $\sum_i g_M \frac{a}{M_i} \cdot dr_i + g_M a_{M0} dt = df_M$
also $g_M \frac{a}{M_i} = \nabla_{r_i} f_M$)

Bedeutung: beliebige Positionen $r_1, \dots, r_N$ zulässig, aber Bewegung lokal eingeschränkt. (etwa Geschwindigkeit längs der Bahn

$$\sum_i \frac{a}{M_i} \cdot \dot{r}_i + a_{M0} = 0)$$

Bsp: • Reagenz mit Auto auf Ebene: Jeder Punkt erreichbar, aber lokale Bewegung (mountain) durch Luckstellung gegeben.

• Schlittschuhlaufen: Kufen erlebten nur Vor & Zurück, aber nicht seitwärts.

(iii) In beiden Fällen:

rhéonomes Zwangsbedingung (zeitabhängig)
skléonomes ———— (nicht explizit zeitabhängig, statisch)

(iv) Ungleichungen (z.B. Gas in Behälter mit Wandlinien)

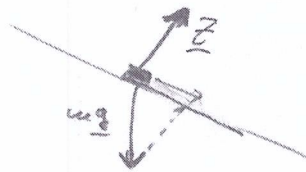
$\Rightarrow$ Bewegungsgleichungen: $m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underbrace{\underline{F}_i}_{\substack{\text{äußere} \\ \text{Kräfte}}} + \underbrace{\sum_{j=1}^N \underline{F}_{ij}}_{\substack{\text{innere} \\ \text{Kräfte}}} =: \underline{X}_i \quad i=1, \dots, N$

Leistungssätze Kräfte müssen unter Nebenbedingungen $f_k(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, t) = 0$ gelöst werden.
oder
 $\sum_{i=1}^N \underline{a}_i \cdot \underline{v}_i + \underline{a}_0 = 0$

Idee: Nebenbedingungen sollen durch Zwangskräfte $\underline{Z}_i$ erzwingen werden

$$m \ddot{\underline{r}}_i = \underline{X}_i + \underline{Z}_i \quad i=1, \dots, N$$

Bsp: 2D-Bewegung auf schiefer Ebene $\rightarrow$ effektive 1D-Bewegung



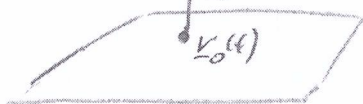
2.2 Virtuelle Verschiebungen

virtuelle Verschiebung $\{\delta \underline{r}_i\}$: infinitesimale Änderung der Koordinaten, die zu fester Zeit ($\delta t = 0$) die (holonom bzw. nichtholonom) Zwangsbedingungen erfüllen.

(Vgl.: reale Verschiebungen $d\underline{r}_i$: um Zeitintervall dt entlang der Bahn)

$$\delta f_k := \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha} \frac{\partial f_k}{\partial r_{i\alpha}} \delta r_{i\alpha} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^N \underline{a}_i \cdot \delta \underline{r}_i = 0$$

Bsp: Bewegung in Ebene: $\underline{n} \cdot (\underline{r} - \underline{r}_0(t)) = 0$
 $\uparrow \underline{n}$: Normalenvektor Bewegung der Ebene



$\Rightarrow$ holonom Zwangsbedg. entspricht N Masspunkten

$$f(\underline{r}_i) = \underline{n} \cdot (\underline{r}_i - \underline{r}_0(t)) = 0 \quad i=1, \dots, N$$

$$\Rightarrow df = \underline{n} \cdot (d\underline{r}_i - \underline{v}_0(t) dt) = 0 \quad \text{mit} \quad \underline{v}_0 = \frac{d}{dt} \underline{r}_0(t)$$

$$\text{also i.A.:} \quad \underline{n} \cdot d\underline{r}_i = \underline{n} \cdot \underline{v}_0(t) dt \neq 0$$

$$\text{also} \quad df = \underline{n} \cdot \underline{r}_i = 0 \Rightarrow \underline{r}_i \perp \underline{n} \quad \text{bei festgehaltener Ebene}$$

