

2.3 D'Alembertsches Prinzip der virtuellen Arbeit

9

System von N Massenpunkten mit Zwangsbedingungen:

↳ Bewegungsgleichungen mit Zwangskräften:

$$m_i \ddot{\underline{x}}_i - \underline{X}_i = \underline{Z}_i \quad i=1, \dots, N$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\underline{x}}_i - \underline{X}_i) \cdot \delta \underline{x}_i = \sum_{i=1}^N \underline{Z}_i \cdot \delta \underline{x}_i$$

virtuelle Arbeit der eingeprägten & der Zwangskräfte

Kräfte

Bsp: (i) Bewegung auf Fläche $f(\underline{x}, t) = 0$ (etwa Ebene $\underline{x} \cdot (\underline{x}_i = \underline{v}_0(t)) = 0$)

↳ Zwangskräfte $\perp$ Fläche $\Rightarrow \underline{Z}_i = \lambda_i (t_1, \dots, t_n, t) \nabla f$
 $\underline{Z}_i = \underline{Z}_i$ für Ebene

virtuelle Arbeit: $\underline{Z}_i \cdot \delta \underline{x}_i = \lambda_i \underbrace{\nabla f \cdot \delta \underline{x}_i}_{\perp \text{ Fläche}} = \lambda_i \underbrace{\delta f}_{\perp \text{ Fläche}} = 0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^N \underline{Z}_i \cdot \delta \underline{x}_i = 0$ virtuelle Arbeit verschwindet

aber reelle Arbeit: $\sum_{i=1}^N \underline{Z}_i \cdot d\underline{x}_i \neq 0$ im Allgemeinen

(ii) starre Körper $f_{ij} = |\underline{x}_i - \underline{x}_j| - l_{ij} = 0$

↳ Zwangskräfte in Richtung $\underline{x}_i - \underline{x}_j \Rightarrow \underline{Z}_{ij} = \lambda_{ij} \frac{\underline{x}_i - \underline{x}_j}{|\underline{x}_i - \underline{x}_j|} = \lambda_{ij} \frac{\underline{x}_i - \underline{x}_j}{r_{ij}}$

actio = reactio: $\underline{Z}_{ij} = -\underline{Z}_{ji} \Rightarrow \lambda_{ij} = \lambda_{ji}$

$\Rightarrow$ gesamte Zwangskraft auf m_i : $\underline{Z}_i = \sum_{j \neq i} \underline{Z}_{ij} = \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} \frac{\underline{x}_i - \underline{x}_j}{r_{ij}}$

$\Rightarrow \underline{Z}_i \cdot \delta \underline{x}_i = \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} \frac{\underline{x}_i - \underline{x}_j}{r_{ij}} \cdot \delta \underline{x}_i \neq 0$ i.A.

↳ verschwindet nicht für ein beliebiges $\delta \underline{x}_i$, aber:

$$\sum_{i=1}^N \underline{Z}_i \cdot \delta \underline{x}_i = \sum_{ij} \lambda_{ij} \frac{\underline{x}_i - \underline{x}_j}{r_{ij}} \cdot \delta \underline{x}_i$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij} \lambda_{ij} \frac{\underline{x}_i - \underline{x}_j}{r_{ij}} \cdot \delta (\underline{x}_i - \underline{x}_j) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \lambda_{ij} \delta r_{ij} \stackrel{\text{Absteigbarkeit}}{=} 0$$

$$= \delta r_{ij}, \text{ da } \delta |\underline{r}| = \delta \left(\sqrt{(\underline{r} \cdot \underline{r})} \right) = \frac{1}{2} (\underline{r} \cdot \underline{r})^{-\frac{1}{2}} 2 \underline{r} \cdot \delta \underline{r} \\ = \delta (|\underline{r}|) = \frac{\underline{r}}{r} \cdot \delta \underline{r}$$

Allgemeine Form: $\sum_{i=1}^N \vec{z}_i \cdot \vec{r}_i = 0$

10

$\Rightarrow \sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{K}_i) \cdot \vec{r}_i = 0$ d'Alambert'sches Prinzip

• Differenzialprinzip / Variationsprinzip

Der wirklichen Bewegung Zustand ist der Extremalzustand (in dem Sinn, dass der gesamte Wirkleistung Null ist.)

↳ Variationsprinzip mit Nebenbedingungen:

(allg. Notation: $\vec{r}_i \rightarrow x_j$, $\vec{K}_i \rightarrow K_j$, $\vec{a}_i \rightarrow \phi_j^{\mu}$ Korrespondenzen $i=1, \dots, N, j=1, \dots, 3N$)

$$\sum_{j=1}^{3N} (m_j \ddot{x}_j - K_j) \delta x_j = 0 \quad \text{Nebenbedingungen} \quad \sum_{j=1}^{3N} \phi_j^{\mu} \delta x_j = 0, \mu=1, \dots, A$$

Lösung mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren

Falls δx_i frei wählbar, dann würde $(m_j \ddot{x}_j - K_j) = 0$ gelten

Idee: Umschreiben, sodass ein Satz von Faktoren frei variierbar ist

(i) Addition Nebenbedingungen mit Lagrange-Multiplikatoren λ_{μ} :

$$\sum_{j=1}^{3N} \left(m_j \ddot{x}_j - K_j - \sum_{\mu=1}^A \lambda_{\mu} \phi_j^{\mu} \right) \delta x_j = 0$$

(ii) Eliminieren $\delta x_1, \dots, \delta x_A$ aus den Nebenbedingungen, dann sind

$\delta x_{A+1}, \dots, \delta x_N$ frei variierbar.

(iii) Bestimme $\lambda_1, \dots, \lambda_A$ sodass

$$m_j \ddot{x}_j - K_j - \sum_{\mu=1}^A \lambda_{\mu} \phi_j^{\mu} = 0 \quad \text{für } j=1, \dots, A$$

(LG5 für $\lambda_{\mu}^{(1)}$ als Funktionen von $\ddot{x}_j^{(1)}(t)$)

$$\Rightarrow \sum_{j=A+1}^{3N} \left(m_j \ddot{x}_j - K_j - \sum_{\mu=1}^A \lambda_{\mu}^{(1)} \phi_j^{\mu} \right) \delta x_j = 0$$

frei variierbar

$$\Rightarrow m_j \ddot{x}_j - K_j - \sum_{\mu=1}^A \lambda_{\mu}^{(1)} \phi_j^{\mu} = 0 \quad \text{Lagrange-Gleichung ist}$$

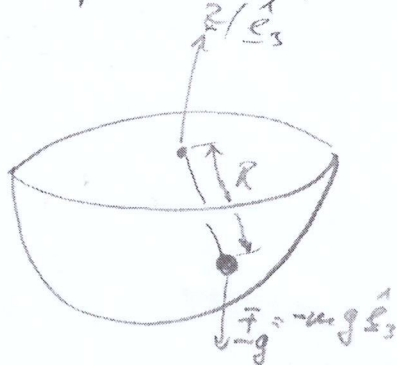
"Zwangsbedingung"

Für holonom Zwangsbedingungen $m_j \ddot{x}_j - K_j - \sum_{\mu=1}^A \lambda_{\mu} \frac{\partial K_{\mu}}{\partial x_j} = 0$

Lagrange-I Formel (immer) (nicht für TPI + I + L. Element)

(II) $\rightarrow$ physikalischer Modell

11



Zwangsbedg: $f(r(t)) = r(t)^2 - R^2 = 0$

⊗ Trick: $\dot{f}(r) = 2r \cdot \dot{r} = 0$

$$\ddot{f}(r) = 2\dot{r}^2 + 2r \cdot \ddot{r} = 0$$

Bewegungsgleich: $m\ddot{r} = m\underline{g} + \underline{Z} \stackrel{!}{=} m\underline{g} + 2\lambda \underline{r}$

$\underline{Z}$: in Richtung $\underline{r}$ plausibel $\Rightarrow$ Annahme: $\underline{Z} = 2\lambda \underline{r}$

$$\Rightarrow m\underline{r} \cdot \ddot{r} = m\underline{r} \cdot \underline{g} + 2\lambda \underbrace{\underline{r} \cdot \underline{r}}_{=R^2}$$

⊗
$$-m\dot{r}^2 = m\underline{r} \cdot \underline{g} + 2\lambda R^2 \Rightarrow 2\lambda = -\frac{m}{R^2} (\dot{r}^2 + \underline{r} \cdot \underline{g})$$

$$\Rightarrow \underline{Z} = -\frac{m}{R^2} (\underbrace{\dot{r}^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{Zentrifugalkraft}}} + \underbrace{\underline{r} \cdot \underline{g}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Stoßkraft}}}) \underline{r} \quad (\text{Gesamtwirkung hat abhängig!})$$

$$\Rightarrow \ddot{r} = \underline{g} - \frac{1}{R^2} (\dot{r}^2 + \underline{r} \cdot \underline{g}) \underline{r}$$

(Allgemein: $\underline{Z} = \lambda \underline{\nabla} f \Rightarrow \underline{Z} = \lambda 2 \underline{r}$)

$\uparrow$
Gradient $\perp$ auf Fläche $f=0$, wie auch $\underline{Z}$, wenn Tangentialbewegung nicht zu berücksichtigen

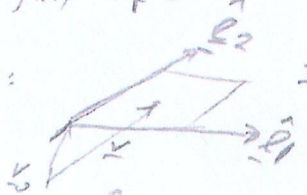
2.4 Generalisierte Koordinaten

12

Idee: Finde $f = 3N - 1$ Koordinaten, die unabhängig voneinander sind und dennoch die Zwangsbedingungen erfüllen. **Generalisierte**

Koordinaten $\{q_1, \dots, q_f\}$ $f = \#$ Freiheitsgrade (unfrei holonom ZB)

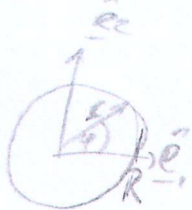
Bsp: (i) Ebene:



$$\underline{r}(t) = \underline{r}_0(t) + q_1 \underline{\hat{e}}_1 + q_2 \underline{\hat{e}}_2 \Rightarrow f=2$$

unabhängige Koordinatengrößen

(ii) Kreis:



$$\underline{r}(t) = R (\cos \varphi \underline{\hat{e}}_1 + \sin \varphi \underline{\hat{e}}_2) \Rightarrow f=1$$

beliebige Vektoren $\underline{r}_i$ durch $q_1, \dots, q_f$ ausdrücken:

$$\underline{r}_i(q_1, \dots, q_f, t) \quad \underline{r}_i = \sum_{j=1}^f \left(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \right) dq_j \Rightarrow \sum_{i=1}^N \underline{x}_i \cdot d\underline{r}_i = \sum_{j=1}^f \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N \underline{x}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \right)}_{Q_j} dq_j$$

generalisierte Kräfte

2.5 Lagrange-Gleichungen 2. Art

$$\text{d'Alembertsches Prinzip: } \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot d\underline{r}_i = \sum_{i=1}^N \underline{x}_i \cdot d\underline{r}_i = \sum_{j=1}^f Q_j dq_j$$

linke Seite durch kinetische Energieformel durch Definition der **Kinetischen**

$$\text{Energie } T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad \text{zu: } \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot d\underline{r}_i = \sum_{j=1}^f \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} dq_j$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j} \quad \text{mit } j=1, \dots, f$$

Lagrange-Gleichungen 2. Art

- gilt unbeeinträchtigt für Zwangsbedingungen (sooft kein generalisierte Koordinaten)

Für **konserватiven Kräfte**: $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$ mit $V(q_1, \dots, q_f, t)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T-V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T-V}{\partial q_j} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$$

Lagrange-Funktion

Einschub: Berechnung der linken Seite

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^f \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \right) \delta \mathbf{q}_j$$

$$= \sum_{j=1}^f \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} m_i \mathbf{r}_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \right) - m_i \mathbf{r}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \right) \right\} \delta \mathbf{q}_j$$

Mit $\frac{d}{dt} \mathbf{r}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^f \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \right) \dot{\mathbf{q}}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \mathbf{v}_i$ folgt $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_j} \mathbf{v}_i$, und $\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j}$

denn: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \right) = \sum_k \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_k \partial \mathbf{q}_j} \right) \dot{\mathbf{q}}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial \mathbf{q}_j}$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_j} \left\{ \sum_k \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_k} \right) \dot{\mathbf{q}}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right\} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_j} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_k} \right) \dot{\mathbf{q}}_k + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_j} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_j \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j}) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \right\} \delta \mathbf{q}_j \quad (*)$$

mit $m_i \mathbf{v}_i \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \left(\frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \right)$ und $m_i \mathbf{v}_i \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \left(\frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \right)$ folgt:

$$(*) = \sum_{j=1}^f \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_j} - 0_j \right\} \delta \mathbf{q}_j = 0, \quad T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2$$

↑
for convenience

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_j} = Q_j}$$

für TP I + II d. Lohmann

wichtig

Herleitung