

Für konservative Kräfte: $Q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j}$

14

$$\left(V(r_1(q_1, \dots, q_f, t), r_2(q_1, \dots, q_f, t), \dots, r_N(q_1, \dots, q_f, t)) = V(q_1, \dots, q_f, t) \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial q_j} V = 0 \quad \text{für allgemeine (s.c.)}$$

und der Definition der Lagrange-Funktion $L(\{q_j\}_j, \{\dot{q}_j\}_j, t) = T - V$ folgt:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0} \quad j = 1, \dots, f$$

Anwandschema / Kochrezept:

Kochrezept der Lagrange-Gleichungen 2. Art:

1. Auswählen generalisierter Koordinaten: $q_1, \dots, q_f$, die die (holonomen) Zwangsbedingungen erfüllen: $r_i = r_i(q_1, \dots, q_f, t) \equiv r_i(q_k, t)$
2. Berechnen von Geschwindigkeiten $v_i(q_k, \dot{q}_k, t) = \frac{d}{dt} r_i(q_k, t)$ und kinetischer Energie $T(q_k, \dot{q}_k, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i(q_k, \dot{q}_k, t)^2$
3. Potenzielle Energie für konservative Kräfte: $V(q_k, t) = V(r_i(q_k, t))$
 $\Rightarrow$ Lagrange-Funktion $L(q_k, \dot{q}_k, t) = T(q_k, \dot{q}_k, t) - V(q_k, t)$
 (Potenzielle/Lage-) Energie für nichtkonservative Kräfte: $Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i \frac{\partial}{\partial q_j} r_i(q_1, \dots, q_f, t)$
4. Aufstellung der Bewegungsgleichungen ($j = 1, \dots, f$):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

5. Lösen der Bewegungsgleichungen

Bem.: Bei Geschwindigkeitsabhängigen Potenzial

- etwa ein elektromagnetisches Potenzial: $V_{\text{em}} = e(\phi - \underline{v} \cdot \underline{A})$ -

ergibt sich: $Q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}$

Idea: $\sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i \cdot \underline{F}_i = \sum_{i=1}^N \left(- \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) \underline{F}_i$

Für V_{em} : $Q_j = - \frac{\partial V_{\text{em}}}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V_{\text{em}}}{\partial \dot{q}_j} = e \left(- \frac{\partial \phi}{\partial x_j} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \underline{A}}{\partial \dot{x}_j} - \frac{dA_j}{dt} \right)$

$$= e \left(- \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial t} - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_k}{\partial x_k} \dot{x}_k + \sum_{k=1}^3 \dot{x}_k \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \right)$$

$$= e \left(- \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_k} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k} \right) \dot{x}_k \right) \stackrel{(*)}{=} \underline{F} = e \left(- \nabla \phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} + \underline{v} \times (\nabla \times \underline{A}) \right)$$

Herleitung nicht lös TP I + II S. 46

$$\text{Allgemein: } \sum_{i=1}^N \underline{x}_i \cdot d\underline{r}_i = \sum_{j=1}^f \left(\sum_{i=1}^N \underline{x}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

$$= \sum_{j=1}^f \left(\sum_{i=1}^N \left(-\frac{\partial V}{\partial \underline{r}_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{\underline{r}}_i} \right) \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

$$= \sum_{j=1}^f \left(-\frac{\partial V}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{\underline{r}}_i} \right) \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} \stackrel{N}{=} \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial \underline{r}_i} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \stackrel{N}{=} \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial \dot{\underline{r}}_i} \frac{\partial \dot{\underline{r}}_i}{\partial q_j}$$

$$= \sum_{j=1}^f \underbrace{\left(-\frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right) \right)}_{Q_j} \delta q_j$$

$$(i) \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N m \ddot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 \right) = \frac{d}{dt} T$$

$$(ii) \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = - \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N \underbrace{V_{ij}(\vec{r}_{ij})}_{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} + \sum_{i=1}^N V_i(\vec{r}_i) \right) \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

Kooperative Kräfte

$$= - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N V_{ij}(\vec{r}_{ij}) + \sum_{i=1}^N V_i(\vec{r}_i) \right)$$

$$= - \frac{d}{dt} V \quad \left(\frac{d}{dt} V_{ij}(\vec{r}_{ij}) = \left(\nabla_{\vec{r}_i} V_{ij}(\vec{r}_{ij}) \right) \cdot \dot{\vec{r}}_i + \left(\nabla_{\vec{r}_j} V_{ij}(\vec{r}_{ij}) \right) \cdot \dot{\vec{r}}_j \right)$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} = 0$$

(erh. können dissipative Prozesse, z.B. Reibung, die Energieerhaltung stören/aufheben)

Unter Berücksichtigung von Zwangsbedingungen: $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$ auf rechter Seite

$$\frac{d}{dt} (T+V) = - \sum_{\mu=1}^1 \lambda_{\mu} \frac{\partial f_{\mu}}{\partial t}$$

$$\text{wegen } \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \sum_{\mu=1}^1 \sum_{i=1}^N \lambda_{\mu} \left(\nabla_{\vec{r}_i} f_{\mu} \right) \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

$$\text{und } 0 = \frac{df_{\mu}}{dt} = \sum_{i=1}^N \nabla_{\vec{r}_i} f_{\mu} + \frac{\partial f_{\mu}}{\partial t}$$

$\Rightarrow$ Energie ist erhalten, wenn Zwangsbedingungen skleronom sind.
 $\left(\frac{\partial f_{\mu}}{\partial t} = 0 \right)$

Lagrange II & Newton: (Kooperative Kräfte) (1 Punktformel)

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} m \sum_{j=1}^3 \dot{x}_j^2, \quad q_1 = x_1, \quad q_2 = x_2, \quad q_3 = x_3$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[\left(\frac{1}{2} m \sum_{k=1}^3 \dot{q}_k^2 \right) - V(q_1, q_2, q_3) \right]$$

$$- \frac{\partial}{\partial q_j} \left[T(q_1, q_2, q_3) - V(q_1, q_2, q_3) \right]$$

$$= \frac{d}{dt} m \dot{q}_j + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0$$

$$\Leftrightarrow m \ddot{q}_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \quad j=1, 2, 3$$

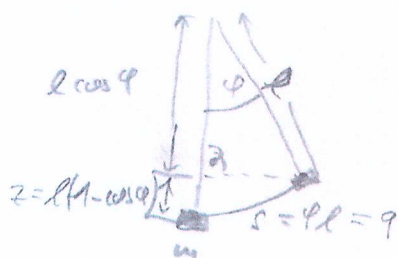
$$\begin{aligned}
 T(q_k, \dot{q}_k, t) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i(q_k, \dot{q}_k, t)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left[\sum_{j=1}^f \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t} \right]^2 \\
 &= a + \sum_{j=1}^f b_j \dot{q}_j + \sum_{j,m=1}^f c_{jm} \dot{q}_j \dot{q}_m
 \end{aligned}$$

$\uparrow$
 System nach
 Ordnung in $\dot{q}_j$

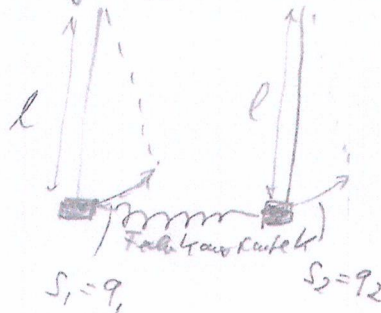
Nach für stationäre Zwangsbedingungen ist T eine konstante
 Bilinearform ($a = b_j = 0$) in $\dot{q}_j$ ($j=1, \dots, f$)

2.6 Normalenschwinger

a) 1 Pendel



b) 2 gekoppelte Pendel



Nachfolgende:

- holonom, stationäre Zwangsbedingungen

Annahme: Potenzial V mit stabiler Ruhelage

- Wählt die generalisierten Koordinaten $q_1, \dots, q_f$ mit Ruhelage $q_1 = \dots = q_f = 0$
- Entwickelt das Potenzial um die Ruhelage:

$$\begin{aligned}
 V(q_1, \dots, q_f) &= V(0, \dots, 0) + \sum_{j=1}^f \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial q_j} \right)_0}_{= -Q_j \stackrel{!}{=} 0} q_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^f \underbrace{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right)_0}_{= V_{jk}} q_j q_k + \dots
 \end{aligned}$$

$\underbrace{\quad}_{\substack{\text{d. B. ist } = 0 \\ \text{(Offset der Energi)}}} \quad \quad \quad \underbrace{\quad}_{\substack{\text{Ruhelage}}}$

$$\Rightarrow V(q_1, \dots, q_f) \approx \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^f V_{jk} q_j q_k \geq 0 \quad \text{weil } V_{jk} = V_{kj}$$

• kinetische Energie: $T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^f T_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \geq 0$ mit $T_{jk} = T_{kj} \approx \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right)_0 \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right)_0$
 pos. definite quadratische Form, da Ruhelage stabil & $T \geq 0$