

Bestimmung von A_n und B_n durch Randwertproblem:

34

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \stackrel{!}{=} \varphi(x)$$

$$\frac{2}{l} u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi}{l} v \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \stackrel{!}{=} \gamma(x)$$

Fourier-Reihen
auf reellen Intervall
[0, l]

$$\Rightarrow A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$$

Fourierkoeffizienten

$$v \frac{n\pi}{l} B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \gamma(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$$

- $\omega(x)$: Überlagerung stehender Wellen mit $\omega_n = n\left(\frac{\pi}{l}v\right)$
Grundton: $\omega_1 = \frac{\pi}{l}v$

Obertöne (Harmonische): $\omega_n = n\omega_1$ ($n \geq 2$)

↑
Anregung kommt aus dem Aufbausystem ab

- Einseitige Beschleunigung $\varphi(x) > 0 \Rightarrow A_1 = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) dx > 0$
Grundton schwingt mit

- Flügelschlag-Trommel $\varphi(x) \Rightarrow A_1 = 0$
 $B_1 = 0$ } tiefste Frequenz: $2\omega_1$
 $u_2(x,0) = 0$

mathematische Klasse von Eigenwertproblem:

Sturm-Liouville'sches Eigenwertproblem:

$$L f := [p(x) f'(x)]' - q(x) f(x) = -\lambda r(x) f(x)$$

$$\text{mit } f(0) = f(l) = 0, \quad p(x) > 0, \quad r(x) > 0$$

$$\Rightarrow (i) 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots \quad \text{mit } f_1(x), f_2(x), \dots \quad (iii) \int_0^l f_m(x) f_n(x) r(x) dx = 0, \quad m \neq n$$

$$(ii) f_n(x) \text{ hat } n-1 \text{ Knoten}$$

Orthogonal

• Eigenschwingung einer kreisförmigen Membran:

35

$$2D\text{-Wellengleichung: } u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{v^2} u_{tt}, \quad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$\hookrightarrow \text{Polarkoordinaten: } x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi$$

$$\text{Randbedingung: } u(r=l, \varphi, t) = 0 \quad \forall \varphi, t$$

$$\text{Ausgangszustand: } u(r, \varphi, 0) = \chi(r, \varphi)$$

$$u_t(r, \varphi, 0) = \psi(r, \varphi)$$

(Lösung nicht unbedingt Zylinder-symmetrisch)

$$\text{Separationsansatz: } u(r, \varphi, t) = f(r, \varphi) T(t)$$

$$\hookrightarrow \Delta f \cdot T = \frac{1}{v^2} f \ddot{T}(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta f(r, \varphi)}{f(r, \varphi)} = \frac{1}{v^2} \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\lambda$$

$$\text{Zeitanteil: } \ddot{T}(t) + \lambda v^2 T(t) = 0$$

$$\Rightarrow T(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \quad \omega = \sqrt{\lambda} v = k v$$

$$\text{Ortsanteil: } \Delta f(r, \varphi) + \underbrace{k^2}_{1} f(r, \varphi) = 0, \quad f(l, \varphi) = 0$$

$$\text{Laplace-Operator in Polarkoordinaten: } \Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} f + \frac{\partial^2}{\partial r^2} f + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial f}{\partial r} + k^2 f = 0$$

$$\text{Separationsansatz: } f(r, \varphi) = R(r) \phi(\varphi)$$

$$\hookrightarrow \frac{R}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \phi + \phi \left(\frac{d^2}{dr^2} R + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r^2 R + k^2 R \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{d^2}{d\varphi^2} \phi}{\phi} = -\frac{1}{R} \left(r^2 \frac{d^2}{dr^2} R + r \frac{d}{dr} r^2 R + k^2 r^2 R \right) = -\lambda^2 = \text{const}$$

Winkelanteil: $\phi'' + \lambda^2 \phi = 0$, $\lambda = \frac{1}{k} \frac{d^2}{dy^2}$

Radialanteil: $r^2 R'' + r R' + (k^2 r^2 - \lambda^2) R = 0$, $\lambda = \frac{1}{k} \frac{d^2}{dr^2}$, $\lambda' = \frac{1}{k} \frac{d}{dr}$

Winkelanteil: $\phi(\varphi) = C \cos(\lambda \varphi + \varphi_0)$ mit $\lambda = m \in \mathbb{N}$ wegen
 2π -Periodizität
 $\phi(\varphi) = \phi(\varphi + 2\pi)$

Radialanteil: $r^2 R'' + r R' + (k^2 r^2 - \lambda^2) R = 0$

Substitution $x := kr$ liefert $\left(R' = \frac{dR}{dx} \frac{dx}{dr} = k \frac{dR}{dr} \right)$
 $R'' = k^2 \frac{d^2 R}{dx^2}$

$x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} + (x^2 - \lambda^2) R = 0$ Besselsche Dgl.

Lösungsansatz: $R(x) = x^p \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s x^s$

$\hookrightarrow R'(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s (p+s) x^{p+s-1}$

$\hookrightarrow R''(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s (p+s)(p+s-1) x^{p+s-2}$

Einsetzen und Sortieren nach Potenzen von x :

$x^p: \alpha_0 [p^2 - \lambda^2] = 0$

$\Rightarrow p = \pm \lambda$

$x^{p+1}: \alpha_1 [(p+1)^2 - \lambda^2] = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 = 0$

$x^{p+s}: \alpha_s [(p+s)^2 - \lambda^2] + \alpha_{s-2} = 0 \quad (s \geq 2)$

$\hookrightarrow \alpha_s = \frac{\alpha_{s-2}}{\lambda^2 - (\pm \lambda + s)^2} = \frac{\alpha_{s-2}}{s(\mp \lambda - s)}$

Rekursionsformel!

(alle ungeraden Potenzen
 verschwinden wegen $\alpha_1 = 0$)

Fortlegg: $d_0 := \frac{1}{2^m \lambda!}$: Bessel Funktionen ($\lambda = m \in \mathbb{N}$)

$$J_m(x) = x^m \sum_{s=0}^{\infty} d_s x^s = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!(m+r)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2r}$$

$\uparrow$
 $d_s = -\frac{d_{s-2}}{s(2m+s)}$

weitere unabhängige Lösung: $N_m(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} J_m(x) - (-1)^m \frac{\partial}{\partial x} J_{-m}(x) \right]$
(Neumannsche Funktion)

G $R(r) = C_1 J_m(kr) + C_2 N_m(kr)$ (hier: $C_2 = 0$)
sonst $N_m(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$

Randbed: $R(l) = 0 \Rightarrow J_m(kl) = 0$

Aber: $J_m(x)$ hat unendlich viele Nullstellen: $x = \mu_n^m$ - Indizes!

$\Rightarrow kl = \frac{\omega}{v} l = \mu_n^m \Rightarrow \text{Eigenfrequenzen: } \omega_n^m = \frac{v}{l} \mu_n^m$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung:

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} u_{nm}(r, \varphi, t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} T_{nm}(t) \phi_m(\varphi) R_{nm}(r)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(A_{nm} \cos(\omega_n^m t) + B_{nm} \sin(\omega_n^m t) \right) \cos(m\varphi + \varphi_0) J_m(k_n^m r)$$

Knotenlinien:



Eigenfrequenzen... hier nicht notwendig. Vorzeichen! Kein Ton!