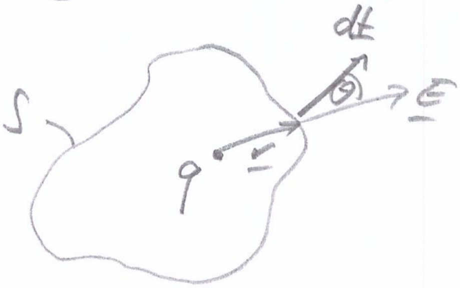
- Quellen des elektrischen Feldes:

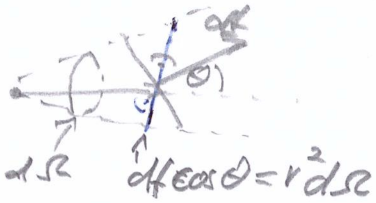
Betrachte: Punktladung q bei $\underline{r}'=0$: $\underline{E}(\underline{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\underline{r}}{r^3}$

$\Rightarrow$ elektrischer Kraftfluss durch eine geschlossene Oberfläche S um q:

Raumwinkel

$$\oint_S d\underline{f}\cdot\underline{E}(\underline{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon}\oint_S \frac{d\underline{f}\cdot\underline{r}}{r^3} = \dots = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\underbrace{\oint_S d\Omega}_{4\pi} = \frac{q}{\epsilon_0}$$





$\Rightarrow \boxed{d\underline{f}\cdot\underline{r} = df\, r\cos\theta = r^2 d\Omega}$

$$\Rightarrow \epsilon_0 \oint_S d\underline{f}\cdot\underline{E}(\underline{r}) = q \quad \text{oder} \quad \epsilon_0 \oint_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{E}(\underline{r}) = \int_V d^3r'\,\rho(\underline{r}')$$

Integralform des Gaußschen Gesetzes (Gaußsches Gesetz)

- Gaußscher Integralsatz

$$\oint_{\partial V} d\underline{f}\cdot\underline{E}(\underline{r}) = \int_V d^3r\,\mathrm{div}\,\underline{E}(\underline{r}) = \int_V d^3r\,\rho(\underline{r})$$

$\Rightarrow \epsilon_0\,\mathrm{div}\,\underline{E}(\underline{r}) = \rho(\underline{r})$ differenzielle Form des Gaußschen Gesetzes

↳ Die elektrischen Ladungen sind die Quellen des elektrischen Feldes.

Elektrostatik:

(i) $\underline{E}(\underline{r})$ besitzt skalares Potential $\underline{E}(\underline{r}) = -\underline{\nabla}\phi(\underline{r})$

$\Updownarrow$

(ii) $\mathrm{rot}\,\underline{E} = 0$ statisches $\underline{E}$-Feld ist wirbelfrei $(\underline{\nabla}\times\underline{\nabla}\phi = 0)$

$\Updownarrow$

Stokesscher Satz:

(iii) $\int_1^2 \underline{E}\cdot d\underline{s}$ Weg unabhängig $\qquad \oint_{\partial F} \underline{E}\,d\underline{s} = \int_F \mathrm{rot}\,\underline{E}\,d\underline{f}$

- Arbeit im elektrischen Feld, um Ladung q von $\underline{r}_1$ nach $\underline{r}_2$ zu bringen:

$$W = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{s} = q \int_1^2 \underline{E}(\underline{r}) \cdot d\underline{s} = -q \int_1^2 d\underline{s} \cdot \underline{\nabla}\phi = -q \int_1^2 d\phi$$

$$= q\left(\phi(\underline{r}_1) - \phi(\underline{r}_2)\right) \quad : \text{Potenzialdifferenz}$$

$$\parallel$$

elektrische Spannung

- $\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi(\underline{r})$ eingesetzt in $\underline{\nabla}\cdot\underline{E} = \operatorname{div}\underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$:

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{E}(\underline{r}) = \underline{\nabla}\cdot\left(-\underline{\nabla}\phi(\underline{r})\right) = -\Delta\phi(\underline{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{r}) \quad \text{Poisson-Gleichung}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{Laplace-Operator}$$

$\Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$ wird erst durch Randbedingungen eindeutig:

(i) $\phi(\underline{r}) \to 0$ hinreichend rasch für $|\underline{r}| \to \infty$

oder

(ii) $\phi(\underline{r})$ gegeben auf Flächen im Endlichen (Leiteroberflächen)

Lösung zu (i): $\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$

$$\Rightarrow \Delta\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \rho(\underline{r}') \, \Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \quad (\text{Singularität bei } \underline{r} = \underline{r}')$$

a) $\underline{r} \neq \underline{r}'$:

$$\Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \underline{\nabla}_r \cdot \underline{\nabla}_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = -\underline{\nabla}_r \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

$$= -\frac{\underline{\nabla}\cdot(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} - (\underline{r}-\underline{r}')\,\underline{\nabla}_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

$$= -\underbrace{\frac{3}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}}_{\underline{\nabla}\cdot\underline{r} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 3} - (\underline{r}-\underline{r}') \cdot \underbrace{\frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{\underline{\nabla}_r |\underline{r}-\underline{r}'|} \frac{(-3)}{|\underline{r}-\underline{r}'|^4} = 0$$

b) $$\int_V d^3r' \, \Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \int_V d^3r' \, \underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$\underset{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial V} d\underline{f}' \cdot \underline{\nabla}_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$= - \int_{\partial V} d\underline{f} \cdot \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

$$= - \oint d\Omega$$

$$= \begin{cases} -4\pi & \text{für } \underline{r}' \in V \\ 0 & \text{für } \underline{r}' \notin V \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = -4\pi \, \delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

Diracsche δ-Funktion (Distribution)

[$\int_V d^3r \, \delta(\underline{r}-\underline{r}') = \begin{cases} 1 & \text{für } \underline{r}' \in V \\ 0 & \text{für } \underline{r}' \notin V \end{cases}$ $\quad \int_V d^3r \, f(\underline{r}) \, \delta(\underline{r}-\underline{r}') = f(\underline{r}')$ falls $\underline{r}' \in V$]

$$\Rightarrow \Delta \phi(\underline{r}) = -\frac{4\pi}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \rho(\underline{r}') \, \delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\underline{r})$$

In Worten: Das Coulomb-Potenzial $\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$ ist die Lösung der Poissongleichung im gesamten $\mathbb{R}^3$ für eine Punktladung $q=1$ bei $\underline{r}'$ (Ladungsdichte $\delta(\underline{r}-\underline{r}')$)