2. Magnetostatik

- stationäre Ströme: $\operatorname{div} \underline{j} = 0$
- WW zwischen bewegten Ladungen:

Kraft auf Ladung q, die sich mit $\underline{v}$ bewegt:

$$\underline{F} = q\, \underline{v} \times \underline{B}(\underline{r})$$ Lorentzkraft mit magnetischer Flussdichte | Induktion

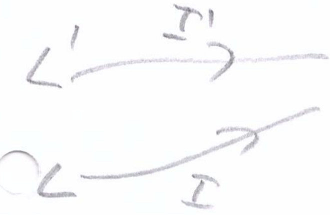
$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$ Ampère-Gesetz (vgl. Coulomb-Gesetz)

SI-Einheiten: $[B] = 1\,\frac{Vs}{Cm} = 1\,\underbrace{\frac{kg\,m^2}{Cs^2}}_{V}\,\frac{s}{m^2} = 1T$ (Tesla)

magnetische Feldkonstante (Permeabilität) $\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6}\,\frac{Vs}{Am}$ $(\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1)$

Gauß-Einheiten: $[B] = \frac{dyn}{ESE} = \frac{\sqrt{dyn}}{cm} = 1G$ (Gauß) $\Rightarrow 1\frac{G}{c} = 10^{-4}T$

- Kraft zwischen 2 stromdurchflossenen Leitern:



(Stromfäden Magnetostatik $\hat{=}$ Punktladungen Elektrostatik)

$\frac{d\underline{r}'}{dt}$

Strom durch L': $\underline{j}(\underline{r}')\, d^3r' = \rho\, d^3r'\, \underline{v}' = \frac{\rho\, d^3r'}{dt}\, d\underline{r}' = I'\, d\underline{r}'$

$$\Rightarrow \underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I' \int_{L'} d\underline{r}' \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$ Biot-Savart-Gesetz

Kraft auf Ladung im Volumenelement d^3r von L: $d\underline{F} = \rho\, \underline{v} \times \underline{B}\, d^3r = \underline{j} \times \underline{B}\, d^3r$ $= I\, d\underline{r} \times \underline{B}$

$$\underline{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I I' \int_{L} d\underline{r} \times \int_{L'} d\underline{r}' \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$ (Ampère-Gesetz)

vgl. $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q q' \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$

mit $d\underline{r} \times (d\underline{r}' \times (\underline{r}-\underline{r}')) = (d\underline{r} \cdot (\underline{r}-\underline{r}'))d\underline{r}' - (d\underline{r} \cdot d\underline{r}')(\underline{r}-\underline{r}')$ TO

$a \quad b \quad c \qquad b(a\cdot c) \qquad c(a\cdot b)$

und $\int_L d\underline{r}' \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} = -\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\Big|_{L\,\text{anfang}}^{L\,\text{ende}} = 0$ (geschlossen oder unendl.)

folgt: $\underline{F} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I I' \int_L \int_{L'} (d\underline{r} \cdot d\underline{r}') \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$

$\Rightarrow$ parallele Ströme $(I d\underline{r} \cdot I' d\underline{r}' > 0)$: Anziehung

antiparallele Ströme $(I d\underline{r} \cdot I' d\underline{r}' < 0)$: Abstoßung

∘ Vektorpotential: $\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$

$\Rightarrow \quad \underline{B}(\underline{r}) = \operatorname{rot} \underline{A}(\underline{r})$

Beweis: $\underbrace{\underline{\nabla}_r}_{\text{bzgl. } \underline{r}!} \times \underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \underbrace{\left(\nabla_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right)}_{-\frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}} \times \underline{j}(\underline{r}')$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} = \underline{B}$$

(i) $\underline{B} = \operatorname{rot} \underline{A}$

$\Downarrow$

(ii) $\operatorname{div} \underline{B} = \underline{0}$ (keine magnet. Quellen!: $\underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{A}) = 0$)

$\Updownarrow$

(iii) $\oint_{\partial V} \underline{B} \cdot d\underline{f} = 0$ (keine magnetischen Ladungen)

vgl. $\oint_{\partial V} \underline{E} \cdot d\underline{f} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

Beweis: (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) durch Gauß'schen Satz:

$\oint_{\partial V} \underline{B} \cdot d\underline{f} = \int_V d^3r \operatorname{div} \underline{B}$: (ii) $\Rightarrow \oint_{\partial V} \underline{B} \cdot d\underline{f} = 0 \Rightarrow$ (iii)

(iii) $\Rightarrow \int d^3r \operatorname{div} \underline{B} = 0 \Rightarrow$ (ii)

- Das Vektorpotenzial $\underline{A}$ ist durch $\underline{B}$ nicht eindeutig bestimmt!

↳ Eichtransformation $\underline{A} \to \underline{A}' = \underline{A} + \underline{\nabla}\,\Phi$ mit beliebiger Funktion $\Phi(\underline{r},t)$

$$\left(\underline{\nabla} \times \underline{\nabla}\,\Phi = 0 \Rightarrow \underline{\nabla} \times \underline{A}' = \underline{\nabla} \times \underline{A} = \underline{B} \right)$$

Bsp: homogenes $\underline{B}$-Feld : $\underline{B} = B_0\, \underline{e}_z$

symmetrische Eichung: $\underline{A} = \frac{1}{2}\, \underline{B} \times \underline{r} = \frac{B_0}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$

↳ Test: $\underline{\nabla} \times \underline{A} = \frac{1}{2} \underset{a}{\underline{\nabla}} \times (\underset{b}{\underline{B}} \times \underset{c}{\underline{r}}) = \frac{1}{2} \underset{b(a\cdot c)}{\underline{B}(\underline{\nabla}\cdot\underline{r})} - \frac{1}{2} \underset{c(a\cdot b)}{(\underline{B}\cdot\underline{\nabla})\underline{r}}$

$$= \frac{1}{2}\, \underline{B} \cdot 3 - \frac{1}{2}\, B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\, \underline{B} - \frac{1}{2}\, \underline{B} = \underline{B}$$

Landau-Eichung: $\underline{A}'^{(1)} = B_0 \begin{pmatrix} -y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\underline{A}'^{(2)} = B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$

Test: $\underline{\nabla} \times \underline{A}'^{(1)} = B_0 \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y & 0 & 0 \end{vmatrix} = B_0 \left(-\partial_y(-y) \right) \underline{e}_z = B_0\, \underline{e}_z = \underline{B}$

$$\underline{\nabla} \times \underline{A}'^{(2)} = B_0 \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & x & 0 \end{vmatrix} = B_0 \left(\partial_x x\, \underline{e}_z \right) = B_0\, \underline{e}_z = \underline{B}$$

Wie lautet die Eichtransformation $\Phi(\underline{r})$?

$\Phi = -\frac{1}{2} B_0\, x y$ bzw. $\Phi = \frac{1}{2} B_0\, x y$

↳ $\underline{\nabla}\Phi = -\frac{1}{2} B_0 \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\underline{\nabla}\Phi = \frac{1}{2} B_0 \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \underline{A} + \underline{\nabla}\Phi = \frac{B_0}{2} \left[\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ bzw. $\underline{A} + \underline{\nabla}\Phi = \frac{B_0}{2} \left[\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \right]$

$= B_0 \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{A}'^{(2)}$ $\qquad = B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{A}'^{(1)}$