- Induktionsgesetz

neu: nicht stationäre Ströme & Ladungsverteilungen und Felder

zeitlich veränderliche Magnetfelder induzieren eine Spannung in einer Leiterschleife (Faraday 1831)

$$\oint_C \underline{E} \cdot d\underline{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \Phi(r,t)$$ Faradaysches Induktionsgesetz

$\Phi(t)$: magnetischer Fluss $\Phi := \int_F \underline{B} \cdot d\underline{f} = \int_F \operatorname{rot} \underline{A} \cdot d\underline{f} \overset{\text{Satz v. Stokes}}{=} \oint_{\partial F} \underline{A} \cdot d\underline{s}$

Änderung von $\Phi$: a) durch $\frac{\partial}{\partial t} \underline{B}$ (Trafo)

b) durch $\frac{\partial}{\partial t} F$ (Dynamo)

$\Phi$ hängt nur vom Rand $\partial F$ ab:

$\hookrightarrow$ $F$ und $F'$: 2 Flächen mit demselben Rand $\partial F$, die ein Volumen $V$ einschließen:


$$\int_F d\underline{f} \cdot \underline{B} - \int_{F'} d\underline{f} \cdot \underline{B} = \oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{B} \overset{\text{Gauß}}{=} \int_V d^3r \underbrace{\operatorname{div} \underline{B}}_{=0} = 0$$

Potenzialdifferenz bei 1 Umlauf: $\Delta\phi = U_{ind} = -\oint_{\partial F} \underline{E} \cdot d\underline{s}$
(induzierte Spannung)

- $$\oint_{\partial F} \underline{E} \cdot d\underline{s} \overset{\text{Stokes}}{=} \int_F \operatorname{rot} \underline{E} \cdot d\underline{f} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_F \underline{B} \cdot d\underline{f}$$

Im Ruhesystem des Leiters ($F$ fest) gilt:

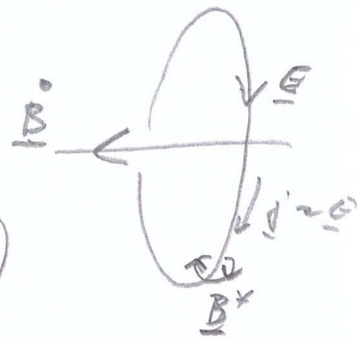
$$\int_F d\underline{f} \cdot \left(\operatorname{rot} \underline{E} + \frac{\partial}{\partial t} \underline{B}\right) = 0 \Rightarrow \operatorname{rot} \underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \underline{B}$$ differenzielle Form des Induktionsgesetzes

# Lenzsche Regel

$\dot{\underline{B}}$ => $\underline{E}$ induziert (rot $\underline{E} = -\dot{\underline{B}}$)

$\underline{E}$ => Ladungsbewegung => $\underline{j} \sim \underline{E}$

$\underline{j}$ => $\underline{B}^*$ erzeugt (rot $\underline{B}^* = \mu_0 \underline{j}$)




$\underline{B}^*$ ist $\dot{\underline{B}}$ entgegengerichtet

# 3. Maxwell-Gleichungen

Bisher $\operatorname{div}\underline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (Gauß/Coulomb)

$\operatorname{div}\underline{B} = 0$ (quellenfrei)

$\operatorname{rot}\underline{E} = -\dot{\underline{B}}$ (Faraday)

$\operatorname{rot}\underline{B} = \mu_0 \underline{j}$ (Ampère)

Maxwell's Ergänzung des Ampèreschen Durchflutungsgesetzes für nichtstationäre Vorgänge:

$\mu_0 \operatorname{div}\underline{j} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\underline{B} = \underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{B}) = 0$ folgt ein (scheinbarer) Widerspruch zur Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot\underline{j} = 0$

Idee: $\operatorname{rot}\underline{B} = \mu_0(\underline{j} + \underline{j}_0)$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{div}\underline{j}_0 = \frac{1}{\mu_0}\underbrace{\operatorname{div}\operatorname{rot}\underline{B}}_{=0} - \operatorname{div}\underline{j} = \frac{\partial\rho}{\partial t} = \varepsilon_0 \operatorname{div}\dot{\underline{E}}$$

$\Rightarrow$ Setze: $$\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\underline{B} = \underline{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

$\uparrow$ Leitungs-Stromdichte / Konvektions-Stromdichte

$\uparrow$ Maxwellsche Verschiebungsstromdichte neue Feldgrößen: $\underline{D}(\underline{r},t) = \varepsilon_0 \, \underline{E}(\underline{r},t)$ dielektrische Verschiebung

$\underline{H}(\underline{r},t) = \frac{1}{\mu_0} \underline{B}(\underline{r},t)$ Magnetfeld / magnetische Feldstärke

---

**Maxwell-Gleichungen** in differentieller Form:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\underline{E} + \dot{\underline{B}} &= 0 \\ \mathrm{div}\,\underline{B} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{homogen}$$

Wechselwirkung der Probeladung mit $\underline{E}, \underline{B}$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{div}\,\underline{D} &= \rho \\ \mathrm{rot}\,\underline{H} - \dot{\underline{D}} &= \underline{j} \end{aligned}\right\} \text{inhomogen}$$

Erzeugung der Felder $\underline{D}, \underline{H}$ durch Ladungen und Ströme

**Maxwell-Gleichungen** in Integralform:

$$\oint_{\partial F} \underline{E} \cdot d\underline{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_F \underline{B} \cdot d\underline{f} = -\frac{\partial}{\partial t} \Phi$$

Zirkulation von $\underline{E}$ entlang der geschlossenen Linie = zeitliche Abnahme des eingeschlossenen magnetischen Flusses

$$\oint_{\partial V} \underline{B} \cdot d\underline{f} = 0$$

magnetischer Fluss durch geschlossene Fläche $= 0$

$$\oint_{\partial V} \underline{D} \cdot d\underline{f} = Q$$

Fluss des elektrischen Feldes durch $\partial V$ = eingeschlossene Ladung $\frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3r \, \rho$

$$\oint_{\partial F} \underline{H} \cdot d\underline{s} = \int_F \dot{\underline{D}} \, d\underline{f} + I$$

Zirkulation der magnetischen Feldstärke entlang geschlossener Linie = dielektrischer Verschiebungsstrom + Konvektionsstrom $I = \int_F d\underline{f} \cdot \underline{j}$