

Maxwell-Gleichungen in Materie (E-Feld)

19

↳ mikroskopische Ursache: (i) freie Ladungsträger (Elektronen, Ionen, etc.)

(ii) gebundenen Ladungen (in Isolatoren / Dielektrika)

↳ Dipole schon bei $E=0$ vorhanden

↳ induziert durch E-Feld

↳ makroskopische Auswirkung: (i) elektrische Ströme

(ii) Reduzierung der potenziellen Energie $W_{el} = -P \cdot E$

Polarisierung

↳ Beschreibung durch **effektive Felder** ($\underline{D}, \underline{H}, \dots$), die bei räumlicher gemittelten Dipoldichten erhalten.

• elektrostatisches Potenzial (mikroskopische freie Ladungen q_j und **elektr. Dipolmomente $\underline{P}_j$**)

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j \left(\frac{q_j}{|\underline{r} - \underline{r}_j|} + \frac{\underline{P}_j \cdot (\underline{r} - \underline{r}_j)}{|\underline{r} - \underline{r}_j|^3} \right)$$

↳ räumliche Mittelung: $\rho(\underline{r}) = \frac{1}{V(\underline{r})} \sum_{j \in V} q_j$ mikroskopische **frei Ladungsdichte**

$\underline{P}(\underline{r}) = \frac{1}{V(\underline{r})} \sum_{j \in V} \underline{P}_j$ — " — **mittlere Dipoldichte (Polarisation)**

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \left(\underbrace{\frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}}_{\text{freie}} + \underbrace{\underline{P}(\underline{r}') \cdot \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}}_{\text{gebundene Ladungen}} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{div } \underline{E} &= -\Delta \phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \left(\rho(\underline{r}') \underbrace{\Delta_r \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}}_{=-4\pi\delta(\underline{r} - \underline{r}')} + \underline{P}(\underline{r}') \cdot \underbrace{\nabla_{r'} \cdot \nabla_r \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}}_{=-4\pi\delta(\underline{r} - \underline{r}')} \right) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\underline{r}) + \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3r' \underline{P}(\underline{r}') \cdot \underbrace{\nabla_{r'} \delta(\underline{r} - \underline{r}')}_{=-\nabla_r \delta(\underline{r} - \underline{r}')} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\underline{r}) - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla_r \cdot \int d^3r' \underline{P}(\underline{r}') \delta(\underline{r} - \underline{r}') \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \left(\rho(\underline{r}) - \underbrace{\nabla_r \cdot \underline{P}(\underline{r})}_{=-\rho_p(\underline{r})} \right) \quad \text{mit } \rho_p := -\nabla \cdot \underline{P} \quad \text{Polarisationsladungsdichte} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{div}(\epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}) = \rho \quad \text{differenzielle Form des} \quad 20$$

Gauß'sche Gesetzes in Materie

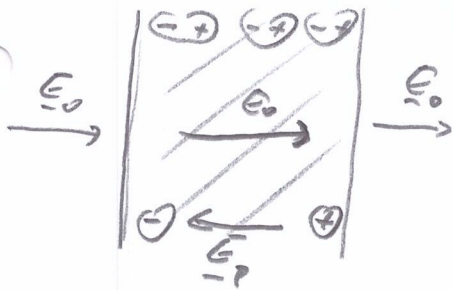
D Dielektrische Verschiebung (in Materie)

$\underline{E}$: Quellen sind frei & gebundenen Ladungen

$\underline{D}$: — " — nur die freien Ladungen

$\underline{P}$: in dem Gegenfeld mit Polarisationen Ladungen als Quellen
 $\epsilon_0 \text{div} \underline{E}_p = \rho_p, \quad \underline{P} = -\epsilon_0 \underline{E}_p$

Bsp: Kondensator mit Dielektrikum



$\underline{E}_0$: äußeres Feld (frei Ladungen erzeugt)

$\underline{E}_p = -\frac{1}{\epsilon_0} \underline{P}$ (Gegenfeld durch Dipole erzeugt)

$$\underline{E} = \underline{E}_0 + \underline{E}_p = \underline{E}_0 - \frac{1}{\epsilon_0} \underline{P} < \underline{E}_0$$

Polarisationsladung verschwindet!



$$Q_p = \int_V d^3r \rho_p(r) = - \int_V d^3r \text{div} \underline{P} \stackrel{\text{Gauß}}{=} - \int_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{P} = 0 \quad (P|_{\partial V} = 0)$$

• Maxwell-Gleichungen in Materie (Magnetismus)

27

↳ mikroskop.

Ursache (iii) Kreisströme / **magnetische Dipolmomente** $\underline{m}$:

↳ permanent vorkommen

↳ gemäß Lenz'scher Regel und Faraday-Gesetz induziert

↳ permanente Dipolmomente verschwinden unterhalb einer kritischen Temp. Spontane aus (QM) spontan ohne äußeres $\underline{B}$ -Feld

↳ makroskop.

Auswirkung: $\rightarrow$ **Paramagnetismus**

$\rightarrow$ **Diamagnetismus**

$\rightarrow$ **Kollektiver Magnetismus**: - Ferromagnetismus

$\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$

- Ferrimagnetismus

$\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$

- Antiferromagnetismus

$\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$

↳ Beschreibung durch **mittlere magnetische Dipoldichte** $\underline{M}(\underline{r}) = \frac{1}{V} \sum_j \underline{m}_j$ (Magnetisierung)

• Vektorpotential:
$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_j \underline{m}_j \times \frac{\underline{r} - \underline{r}_j}{|\underline{r} - \underline{r}_j|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_j \underline{m}_j \times \underline{\nabla} \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}_j|}$$

↳ räumliche Verteilung:
$$\underline{A}(\underline{r}) = - \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\underline{r}' \underline{M}(\underline{r}') \times \underline{\nabla} \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\underline{r}' \underline{\nabla} \times \underline{M}(\underline{r}') \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

Coulomb-Erley

$\text{div} \underline{A} = 0$

$$\Rightarrow \text{rot} \underline{B} \stackrel{\text{div} \underline{A} = 0}{=} -\Delta \underline{A} = - \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\underline{r}' \left(\underbrace{\underline{j}(\underline{r}') \Delta_r \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}}_{= -4\pi \delta(\underline{r} - \underline{r}')} + \underbrace{\underline{\nabla} \times \underline{M}(\underline{r}') \Delta_r \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}}_{= -4\pi \delta(\underline{r} - \underline{r}')} \right)$$

freier Strom magnet. Dipole

$$= \mu_0 (\underline{j}(\underline{r}) + \underline{\nabla} \times \underline{M}(\underline{r})) = \mu_0 (\underline{j}(\underline{r}) + \underline{j}_M(\underline{r}))$$

mit $\underline{j}_M = \underline{\nabla} \times \underline{M}$

Magnetisierungstromdichte

$$\Rightarrow \text{rot}(\underline{B} - \mu_0 \underline{H}) = \mu_0 \underline{j}$$

diffenzielle Form der

2a

$\mu_0 \underline{H}$ Magnetfeld

Ampères im Durchfließgesetz des i-Motors

Magnetfeldstärke $\Rightarrow \text{rot} \underline{H} = \underline{j}$

$\underline{B}$: erzeugt durch Wirbel durch freie Ströme und magnet. Dipole

$\underline{H}$: -1) ———— nur durch freie Ströme

$\underline{H}$: zusätzliche neg. Induktion $\underline{B}_M$ (Wirbel = Magnetisierungsstromdichte)

$$\text{rot} \underline{B}_M = \mu_0 \underline{j}_M, \quad \underline{B}_M = \mu_0 \underline{H}$$

$$\underline{B} = \underline{B}_0 + \underline{B}_M$$

Kontinuitätsgleichung: $\oint \underline{P} + \underline{P} \cdot \underline{j}_P = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\underline{P} - \underline{j}_P) = 0$

$$\underline{P}_P = -\nabla \underline{P}$$

$$\Rightarrow \text{Polarisationsstromdichte } \underline{j}_P = \underline{\dot{P}}$$

$\Rightarrow$ nichts feststehendes Durchfließgesetz

$$\text{rot} \underline{B} = \mu_0 (\underbrace{\underline{j}}_{\text{frei}} + \underbrace{\underline{j}_M}_{\text{neg.}} + \underbrace{\underline{j}_P}_{\text{polari.}}) + \underbrace{\epsilon_0 \mu_0 \underline{\dot{E}}}_{\text{Vakuum Verschiebungsgesetz}}$$

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu_0} \underline{B} - \underline{H} \right) = \underline{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \underline{E} + \underline{P})$$

$$= \underline{D} \quad (\text{Verschiebungstrom im Material: } \underline{\dot{D}})$$

Maxwell-Gleichungen in Materie

$$\text{rot} \underline{E} + \underline{\dot{B}} = 0$$

$$\text{div} \underline{B} = 0$$

$$\text{div} \underline{D} = \rho$$

$$\text{rot} \underline{H} - \underline{\dot{D}} = \underline{j}$$

} wie der Fall mit Problemen

} Erzeugen der Felder durch frei Ladungen / Ströme

$$\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu_0} \underline{B} - \underline{M}$$

Was fehlt zur Vollständigkeit der Gleichungen?

$\hookrightarrow$ Materialgleichungen: $\underline{P} \leftrightarrow \underline{E}, \quad \underline{M} \leftrightarrow \underline{B}$

• Bsp: linear, isotrop, lokal, instantane Zusammenhang

23

$$\underline{P} = \epsilon_0 \chi_e \underline{E} \quad \text{mit } \chi_e \text{ elektrische Suszeptibilität}$$

$$\underline{M} = \chi_m \underline{H} \quad \text{mit } \chi_m \text{ magnetische Suszeptibilität}$$

(Materialkonstanten für lineare Antwort,
↳ aus mikroskopischen Theorien (QM!)
abzuleiten)

$$\hookrightarrow \underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \underline{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \underline{E}$$

mit $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ relative Dielektrizitätskonstante

$$\underline{B} = \mu_0 (\underline{H} + \underline{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \underline{H} = \mu_0 \mu_r \underline{H}$$

mit $\mu_r = 1 + \chi_m$ relative Permeabilität / Magnetkonstante

$$\Rightarrow \underline{M} = \chi_m \underline{H} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi_m}{\mu_r} \underline{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi_m}{1 + \chi_m} \underline{B}$$

paramagnetisch: $\frac{\chi_m}{1 + \chi_m} > 0$ ($\chi_m > 0 \Rightarrow \mu_r > 1$)

diamagnetisch: $\frac{\chi_m}{1 + \chi_m} < 0$ ($-1 < \chi_m < 0 \Rightarrow 0 < \mu_r < 1$)