

a) Interferenz ebener Wellen (klassische Überlagerung)

28

(i) die gleiche Ausbreitungsrichtung (z.B. x-Richtung), gleiche Frequenz ω
gleiche Phaseengeschwindigkeit

$$\phi_j(x,t) = a_j e^{i(\omega t - kx)} \quad , \quad a_j = A_j e^{i\varphi_j} \quad \text{Komplexamplitude } j=1,2$$

$A_j \in \mathbb{R}_+$

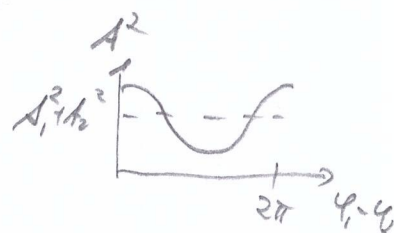
$$\Rightarrow \phi(x,t) = \phi_1 + \phi_2 = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{= A e^{i\varphi}} e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\text{mit } A^2 = (a_1 + a_2)(a_1^* + a_2^*) = (A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2})(A_1 e^{-i\varphi_1} + A_2 e^{-i\varphi_2})$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \left(e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)} \right)$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\leq A_1^2 + A_2^2, \text{ da } A_1^2 + A_2^2 - 2A_1 A_2 = (A_1 - A_2)^2 \geq 0$$



$$\text{und } \tan \varphi = \frac{\text{Im}(a_1 + a_2)}{\text{Re}(a_1 + a_2)} = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

↳ Auslöschung für $A=0 \Rightarrow A_1 = A_2 \wedge \varphi_1 \neq \varphi_2 + (2n+1)\pi, n \in \mathbb{N}$

↳ $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -1$ (gegenphasig)



b) entgegengesetzte Ausbreitungsrichtung:

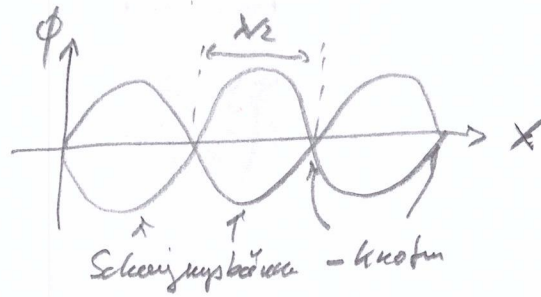
$$\phi_1 = a_1 e^{i(\omega t - kx)} \quad , \quad \phi_2 = a_2 e^{i(\omega t + kx)} \quad , \quad a_j = A_j e^{i\varphi_j}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \phi(x,t) &= \phi_1 + \phi_2 = e^{i\omega t} \left[A_1 e^{i\varphi_1 - ikx} + A_2 e^{i\varphi_2 + ikx} \right] \\ &= (A_1 - A_2) e^{i(\omega t - kx + \varphi_1)} + A_2 e^{i(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2})} \underbrace{\left[e^{i(kx - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2})} + e^{i(kx - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2})} \right]}_{2\cos(kx - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2})} \end{aligned}$$

= *laufende Welle*

stehende Welle

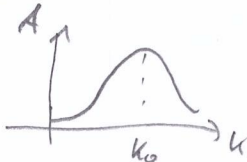
$$\hookrightarrow A_1 = A_2, \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \Rightarrow \phi(x, t) = 2A \cos(\omega t) \cos(kx)$$



(b) Wellenpakete

linearem Superposition ebener Wellen mit gleichem Frequenztyp richtig,
aber verschiedenen k : $\phi(x, t) = \int dk A(k) e^{i(kx - \omega t)}$, $\omega = \omega(k)$

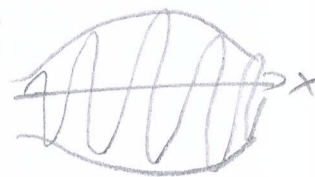
$\hookrightarrow$ Sei $A(k)$ lokalisiert um k_0 , dann heißt $\phi(x, t)$ ein **Wellenpaket**.



$\hookrightarrow$ Entwicklung der Phase $(kx - \omega t)$ um k_0 : $\omega(k) = \underbrace{\omega(k_0)}_{\omega_0} + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} (k - k_0) + \dots$
 $\Rightarrow k = \bar{k} + k_0$

$$\Rightarrow \phi(x, t) \approx \int d\bar{k} A(k_0 + \bar{k}) e^{i[(\bar{k} + k_0)x - (\omega_0 + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} \bar{k} t)]}$$

$$= \underbrace{e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}}_{\text{Trägerwelle}} \underbrace{\int d\bar{k} A(\bar{k} + k_0) e^{i\bar{k}(x - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} t)}}_{\tilde{A}(x, t) \text{ Einhüllende}}$$



Phasenfortschrittswindigkeit der Trägerwelle: $v_{ph} = \frac{\omega_0}{k_0}$

Gruppenfortschrittswindigkeit des Wellenpakets
(Geschwindigkeit des Maximums der Einhüllenden
des Schwerpunkt des Wellenpakets)

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{\tilde{A} = \omega_0 x} = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0}$$

$$\hookrightarrow \omega(k) = v k \Rightarrow v_{ph} = v_g = v$$

$\hookrightarrow \omega(k) = v(k) k$: Dispersion (verschiedene k) breiten sich unterschiedlich schnell aus.

$\hookrightarrow$ **Dispersion**

$$v_{ph} = \frac{\omega(k_0)}{k_0} = v(k_0), \quad v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} = \left[v(k) + k \frac{dv}{dk} \right]_{k_0} = v_{ph} + k_0 \left. \frac{dv}{dk} \right|_{k_0}$$

normale Dispersion: $v_g < v_{ph} \Leftrightarrow \frac{dv}{dk}|_{k_0} < 0$

anomale Dispersion: $v_g > v_{ph}$

keine Dispersion: $v_g = v_{ph}$

(c) elektromagnetische Wellen (in Isolator)

$$\Delta \underline{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{E} = 0 \quad \text{mit} \quad v^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu} = \frac{c^2}{n^2}$$

$n = \sqrt{\epsilon \mu}$ Brechungsindex

↳ Vakuum: $n=1 \Rightarrow v=c=v_{ph}=v_g$

↳ in dispersiven Medien: n hängt von ω (bzw. k) ab

$$\frac{dv}{dk} = c \frac{d}{dk} \frac{1}{n} = -\frac{c}{n^2} \frac{dn}{dk} < 0 \quad \text{normal}$$

$> 0 \quad \text{anomalous}$

$$\Rightarrow v_g = v_{ph} - k_0 \frac{c}{n^2} \frac{dn}{dk}$$

$\rightarrow v_g > c$ möglich,
aber $v_{signal} \leq c$!