

Portfolio der Übungen zur Vorlesung Theoretische Physik I+II für Lehramt

Universität des Saarlandes

Dr. habil. Philipp Hövel, Max Lauer und Studierende

Inhaltsverzeichnis

1 Klassische Mechanik	4
1 Galilei-Transformationen als 10-Parameter-Gruppe	4
1.1 Hintergrund	4
1.2 Musterlösung	4
1.3 Kurioses	6
2 Wurfparabel	7
2.1 Hintergrund	7
2.2 Musterlösung	8
2.3 Kurioses	9
3 Rakete	10
3.1 Hintergrund	10
3.2 Musterlösung	11
3.3 Kurioses	12
4 Zylinder- und Kugelkoordinaten	13
4.1 Hintergrund	13
4.2 Musterlösung	13
4.3 Kurioses	16
5 Atwoodsche Fallmaschine	17
5.1 Hintergrund	17
5.2 Musterlösung	17
5.3 Kurioses	20
6 Zykloidenpendel	21
6.1 Hintergrund	21
6.2 Musterlösung	21
6.3 Kurioses	22
7 Kraftfelder und Arbeit	23
7.1 Hintergrund	23
7.2 Musterlösung	23
7.3 Kurioses	24
8 Perle auf rotierendem Draht	25
8.1 Hintergrund	25
8.2 Musterlösung	25
8.3 Kurioses	27
9 Drei gekoppelte Fadenpendel	28
9.1 Hintergrund	28
9.2 Musterlösung	29
9.3 Kurioses	30
10 Kreuzprodukt	31
10.1 Hintergrund	31
10.2 Musterlösung	31
10.3 Kurioses	31

11 Lenzscher Vektor - Eine weitere Erhaltungsgröße	32
11.1 Hintergrund	32
11.2 Musterlösung	32
11.3 Kurioses	33
12 Kreisförmige Orbits	34
12.1 Hintergrund	34
12.2 Musterlösung	34
12.3 Kurioses	34
13 Legendre-Transformation	35
13.1 Hintergrund	35
13.2 Musterlösung	35
13.3 Kurioses	35
14 Atwoodsche Fallmaschine – reloaded	36
14.1 Hintergrund	36
14.2 Musterlösung	36
14.3 Kurioses	36
15 Teilchen auf einer Kegeloberfläche	37
15.1 Hintergrund	37
15.2 Musterlösung	37
15.3 Kurioses	38
16 Länge von Raumkurven	39
16.1 Hintergrund	39
16.2 Musterlösung	39
16.3 Kurioses	39
17 Massenpunkt auf rotierender Stange	40
17.1 Hintergrund	40
17.2 Musterlösung	40
17.3 Kurioses	40
18 Ebenes Pendel im Phasenraum	41
18.1 Hintergrund	41
18.2 Musterlösung	41
18.3 Kurioses	42
19 Schwerpunkt	43
19.1 Hintergrund	43
19.2 Musterlösung	43
19.3 Kurioses	43
20 Trägheitstensor von Zylinder, Stab, Scheibe, Punktmasse	44
20.1 Hintergrund	44
20.2 Musterlösung	44
20.3 Kurioses	44
21 Trägheitstensor eines Kegels	45
21.1 Hintergrund	45
21.2 Musterlösung	45
21.3 Kurioses	45
II Elektrodynamik	46
22 Delta-Funktion	46
22.1 Hintergrund	46
22.2 Musterlösung	46
22.3 Kurioses	46

23 Homogen geladene Kreisscheibe	47
23.1 Hintergrund	47
23.2 Musterlösung	47
23.3 Kurioses	47
24 Ladungsverteilungen und Delta-Funktion	48
24.1 Hintergrund	48
24.2 Musterlösung	48
24.3 Kurioses	48

Teil I

Klassische Mechanik

1 Galilei-Transformationen als 10-Parameter-Gruppe

Aufgabe 1 Galilei-Transformationen als 10-Parameter-Gruppe

Galilei-Transformationen sind Transformationen zwischen zwei Bezugssystemen. K und K' . Eine allgemeine Galilei-Transformation ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{s}_0 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{R} \mathbf{r}' \\ t &= t' + t_0,\end{aligned}$$

wobei $\mathbf{s}_0 \in \mathbb{R}^3$ eine konstante Verschiebung angibt, $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^3$ die konstante Relativgeschwindigkeit, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ eine Rotationsmatrix (folglich eine orthogonale Transformation) und $t_0 \in \mathbb{R}$ eine konstante zeitliche Verschiebung.

- a) Zeige, dass die Menge der Galilei-Transformationen zusammen mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung \circ die Eigenschaften einer 10-Parameter-Gruppe aufweisen:
 1. Die Verknüpfung ist assoziativ.
 2. Es existiert ein neutrales Element.
 3. Es existiert ein inverses Element.
 4. Die Gruppe ist abgeschlossen bezüglich ihrer Verknüpfung (d.h. zwei hintereinander ausgeführte Galilei-Transformationen sind auch eine Galilei-Transformation).
- b) Bilden die Galilei-Transformationen eine kommutative Gruppe? Begründe! Wofür stehen die 10 Parameter?

Federführende Dokumentation: Lucca Saar

1.1 Hintergrund

1.2 Musterlösung

Definition (aus der Aufgabenstellung). Eine Galilei-Transformation verknüpft die Koordinaten eines Ereignisses (\vec{r}', t') im Bezugssystem K' mit den Koordinaten (\vec{r}, t) im System K :

$$t = t' + t_0, \tag{1}$$

$$\vec{r} = \vec{s}_0 + \vec{v}_0 t + R \vec{r}'. \tag{2}$$

Dabei sind

$$\begin{aligned}\vec{s}_0 &\in \mathbb{R}^3 && \text{(Translation),} \\ \vec{v}_0 &\in \mathbb{R}^3 && \text{(Boost),} \\ R &\in \text{SO}(3) && \text{(Rotation),} \\ t_0 &\in \mathbb{R} && \text{(Zeitverschiebung).}\end{aligned}$$

Wegen $R \in \text{SO}(3)$ gilt insbesondere $R^{-1} = R^T$. Kompakt:

$$g = (R, \vec{v}_0, \vec{s}_0, t_0).$$

Verknüpfungsgesetz. Seien $g_1 = (R_1, \vec{v}_{0,1}, \vec{s}_{0,1}, t_1)$ und $g_2 = (R_2, \vec{v}_{0,2}, \vec{s}_{0,2}, t_2)$. Wird zuerst g_1 und danach g_2 angewendet, so erhält man

$$g_2 \circ g_1 = (R_2 R_1, \vec{v}_{0,2} + R_2 \vec{v}_{0,1}, \vec{s}_{0,2} + R_2 \vec{s}_{0,1} + (\vec{v}_{0,2} + R_2 \vec{v}_{0,1}) t_1, t_2 + t_1).$$

(Die Herleitung erfolgt weiter unten bei a)(4).)

a) Gruppenaxiome

(1) Assoziativität

Die Hintereinanderausführung ist assoziativ, denn sie beruht auf Matrixmultiplikation (assoziativ) und Addition/Skalarmultiplikation von Vektoren (ebenfalls assoziativ). Daher gilt aufgrund der Vererbung für alle g_1, g_2, g_3 :

$$(g_3 \circ g_2) \circ g_1 = g_3 \circ (g_2 \circ g_1).$$

(2) Existenz eines neutralen Elements

Ziel: Finde $e = (R_e, \vec{v}_{0,e}, \vec{s}_{0,e}, t_e)$ mit $e \circ g = g$ und $g \circ e = g$ für alle g .

Bedingung $e \circ g = g$:

$$e \circ g = (R_e R, \vec{v}_{0,e} + R_e \vec{v}_0, \vec{s}_{0,e} + R_e \vec{s}_0 + (\vec{v}_{0,e} + R_e \vec{v}_0) t_0, t_e + t_0) \stackrel{!}{=} (R, \vec{v}_0, \vec{s}_0, t_0).$$

Komponentenweise folgt

$$R_e = I, \quad \vec{v}_{0,e} = \vec{0}, \quad \vec{s}_{0,e} = \vec{0}, \quad t_e = 0.$$

Gegenprobe $g \circ e = g$: Mit $e = (I, \vec{0}, \vec{0}, 0)$ ist

$$g \circ e = (RI, \vec{v}_0 + R\vec{0}, \vec{s}_0 + R\vec{0} + (\vec{v}_0 + R\vec{0}) \cdot 0, t_0 + 0) = g.$$

Ergebnis:

$$e = (I, \vec{0}, \vec{0}, 0).$$

(3) Existenz eines inversen Elements

Ziel: Finde $g^{-1} = (\tilde{R}, \tilde{\vec{v}}_0, \tilde{\vec{s}}_0, \tilde{t})$ mit $g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = e$.

Bedingung $g^{-1} \circ g = e$:

$$g^{-1} \circ g = (\tilde{R}R, \tilde{\vec{v}}_0 + \tilde{R}\vec{v}_0, \tilde{\vec{s}}_0 + \tilde{R}\vec{s}_0 + (\tilde{\vec{v}}_0 + \tilde{R}\vec{v}_0) t_0, \tilde{t} + t_0) \stackrel{!}{=} (I, \vec{0}, \vec{0}, 0).$$

Daraus

$$\tilde{R} = R^{-1}, \quad \tilde{\vec{v}}_0 = -R^{-1}\vec{v}_0, \quad \tilde{\vec{s}}_0 = -R^{-1}\vec{s}_0, \quad \tilde{t} = -t_0.$$

Gegenprobe $g \circ g^{-1} = e$: unmittelbare Einsetzung liefert e .

Ergebnis:

$$g^{-1} = (R^{-1}, -R^{-1}\vec{v}_0, -R^{-1}\vec{s}_0, -t_0).$$

(4) Abgeschlossenheit

Ausgangspunkt: Wende g_1 auf (\vec{r}'', t'') an:

$$t' = t'' + t_1, \quad \vec{r}' = \vec{s}_{0,1} + \vec{v}_{0,1} t' + R_1 \vec{r}'' = (\vec{s}_{0,1} + \vec{v}_{0,1} t_1) + \vec{v}_{0,1} t'' + R_1 \vec{r}''.$$

Dann wende g_2 auf (\vec{r}', t') an:

$$t = t' + t_2 = t'' + (t_1 + t_2), \quad \vec{r} = \vec{s}_{0,2} + \vec{v}_{0,2} (t'' + t_1 + t_2) + R_2 \vec{r}'.$$

Einsetzen und sortieren nach t'' und \vec{r}'' :

$$\vec{r} = \underbrace{[\vec{s}_{0,2} + R_2 \vec{s}_{0,1} + \vec{v}_{0,2} (t_1 + t_2) + R_2 \vec{v}_{0,1} t_1]}_{\text{neue Translation}} + \underbrace{(\vec{v}_{0,2} + R_2 \vec{v}_{0,1}) t''}_{\text{neuer Boost}} + \underbrace{R_2 R_1}_{\text{neue Rotation}} \vec{r}''.$$

Ablesen der neuen Parameter und der neuen Zeit:

$$\boxed{\begin{aligned} R_{21} &= R_2 R_1, \\ \vec{v}_{0,21} &= \vec{v}_{0,2} + R_2 \vec{v}_{0,1}, \\ \vec{s}_{0,21} &= \vec{s}_{0,2} + R_2 \vec{s}_{0,1} + (\vec{v}_{0,2} + R_2 \vec{v}_{0,1}) t_1, \\ t_{21} &= t_2 + t_1. \end{aligned}}$$

Damit ist die Menge unter \circ abgeschlossen.

b) Kommutativität und Parameteranzahl

Nicht-Kommutativität. Im Allgemeinen gilt $g_2 \circ g_1 \neq g_1 \circ g_2$. Erklärbar ist dies zum einen dadurch, dass Rotationen im \mathbb{R}^3 nicht kommutativ ($R_2 R_1 \neq R_1 R_2$) sind, zum anderen unterscheiden sich die Mischterme in \vec{s} (z. B. $(\vec{v}_2 + R_2 \vec{v}_1)t_1$ vs. $(\vec{v}_1 + R_1 \vec{v}_2)t_2$). Die Galilei-Gruppe ist daher nicht kommutativ.

10 Parameter. $SO(3)$ liefert 3 (Rotation), $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ liefert 3 (Boost), $\vec{s} \in \mathbb{R}^3$ liefert 3 (Translation) und $t_0 \in \mathbb{R}$ liefert 1 (Zeitverschiebung):

$$3 + 3 + 3 + 1 = 10.$$

Somit handelt es sich um eine **10-Parameter-Gruppe**.

1.3 Kurioses

2 Wurfparabel

Aufgabe 2 Wurfparabel

- a) Betrachte einen Ball (als Massepunkt), der mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 in einem Winkel α bzgl. der Horizontalen geschossen wird. Das Ball bewege sich im Schwerfeld der Erde und Luftreibung wird vernachlässigt.
1. Leite eine Beziehung zwischen der Höhe y des Balls und der zurückgelegten, horizontalen Distanz x her.
 2. Bestimme die Reichweite $R(\alpha)$ des Balls, d.h., die horizontale Distanz, wenn er wieder den Boden erreicht.
 3. Bestimme die maximale Höhe $h_{\max}(\alpha)$ des Balls.
 4. Bestimme die Flugzeit $T(\alpha)$, bis der Ball wieder auf dem Boden auftrifft.
- b) Nimm an, dass der Ball eine Mauer der Höhe h in einer Entfernung l überwinden muss, um ein Tor im Abstand $2l$ zu erreichen.
1. Wie lautet der Winkel θ (in Abhängigkeit von h und l), um das Tor zu treffen?
Hinweise: Verwende das Ergebnis von Teil a)
 2. Wie groß muss die Anfangsgeschwindigkeit v_0 sein (in Abhängigkeit von h und l), um das Tor zu treffen?

Federführende Dokumentation: Lucca Saar

2.1 Hintergrund

Um die Aufgabe zu lösen muss folgendes Vorwissen vorhanden sein:

Kinematik Momentane Größen: $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$, $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$.

Bewegungsgleichungen (konstante Beschleunigung) Aus dem zweiten Newtonschen Gesetz $m\vec{a} = \vec{F}$ und der Gewichtskraft $\vec{F} = m\vec{g}$ folgt

$$m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}.$$

Durch Integrieren mit Anfangsbedingungen $x(0) = y(0) = 0$ sowie $x'(0) = v_{0x}$, $y'(0) = v_{0y}$ erhält man die Bewegungsgleichungen des schrägen Wurfs:

$$\begin{aligned} x''(t) &= 0, & x'(t) &= v_{0x}, & x(t) &= v_{0x} t, \\ y''(t) &= -g, & y'(t) &= v_{0y} - g t, & y(t) &= v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2. \end{aligned}$$

Extremwerte Um Maxima oder Minima von zeit- oder ortsabhängigen Größen zu bestimmen, wird das Kriterium verwendet, dass an einem Extrempunkt die erste Ableitung verschwindet. Für eine Funktion $f(t)$ gilt also

$$\frac{df}{dt} = 0$$

am Extrempunkt.

Dieses Vorgehen ist allgemeingültig: Wo die erste Ableitung einer glatten Funktion verschwindet, kann ein Extrempunkt vorliegen; ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt, lässt sich anschließend beispielsweise über das Vorzeichen der zweiten Ableitung entscheiden. Beim schrägen Wurf gibt es jedoch nur ein Maximum im Kurvenverlauf, wodurch die zweite Ableitung nicht benötigt wird.

2.2 Musterlösung

a) Grundgleichungen und Eliminierung der Zeit

Ansatz: Punktmasse, Startgeschwindigkeit v_0 im Winkel α über der Horizontalen, Ursprung als Abwurfpunktpunkt. Zerlegung:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha, \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha.$$

Bewegung ohne Luftreibung:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_{0x} t = v_0 \cos \alpha t, \\ y(t) &= v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2. \end{aligned}$$

(1) **Bahnkurve $y(x)$.** Eliminiere t aus $x = v_0 \cos \alpha t$:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}.$$

Eingesetzt in $y(t)$:

$$y(x) = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

(2) **Reichweite $R(\alpha)$.** Aufschlag, wenn $y = 0$ (außer $x = 0$):

$$0 = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \Rightarrow x \neq 0 : \quad \tan \alpha = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x.$$

Setze $x = R$ und benutze $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$:

$$R(\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha).$$

(3) **Maximale Höhe $h_{\max}(\alpha)$.** Maximum von $y(t)$ bei $\dot{y} = 0$:

$$\dot{y}(t) = v_0 \sin \alpha - gt = 0 \Rightarrow t_{\max} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Eingesetzt in $y(t)$:

$$\begin{aligned} h_{\max} &= v_0 \sin \alpha \cdot \frac{v_0 \sin \alpha}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 \\ &= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \end{aligned}$$

Also

$$h_{\max}(\alpha) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

(4) **Flugzeit $T(\alpha)$.** Nullstelle $y(t) = 0$ außer $t = 0$:

$$v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \Rightarrow t \left(v_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} g t \right) = 0 \Rightarrow t = T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Also

$$T(\alpha) = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

b) **Mauer bei $x = l$ (Höhe h) und Tor bei $x = 2l$**

Es wird verlangt, dass die Bahn durch die Punkte $(x, y) = (l, h)$ und $(2l, 0)$ geht. Beide Bedingungen werden in $y(x)$ eingesetzt und zunächst nach dem Winkel aufgelöst.

(1) **Winkel $\theta(h, l)$.** Aus $y(2l) = 0$:

$$0 = 2l \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} (2l)^2 = 2l \tan \theta - \frac{2gl^2}{v_0^2 \cos^2 \theta}.$$

Daraus folgt

$$\tan \theta = \frac{gl}{v_0^2 \cos^2 \theta}. \quad (*)$$

Aus $y(l) = h$:

$$h = l \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} l^2.$$

Benutze (*), um $\frac{gl^2}{v_0^2 \cos^2 \theta} = l \tan \theta$ umzuschreiben:

$$h = l \tan \theta - \frac{1}{2} l \tan \theta = \frac{1}{2} l \tan \theta \Rightarrow \boxed{\tan \theta = \frac{2h}{l}} \Rightarrow \boxed{\theta = \arctan\left(\frac{2h}{l}\right)}.$$

(2) **Erforderliche Anfangsgeschwindigkeit $v_0(h, l)$.** Der gefundene Winkel θ wird in (*) eingesetzt:

$$v_0^2 = \frac{gl}{\tan \theta \cos^2 \theta}.$$

Mit $\tan \theta = 2h/l$ und $\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{1 + 4h^2/l^2} = \frac{l^2}{l^2 + 4h^2}$:

$$v_0^2 = \frac{gl}{(2h/l)} \cdot \frac{l^2 + 4h^2}{l^2} = \frac{gl^2}{2h} \cdot \frac{l^2 + 4h^2}{l^2} = \frac{g(l^2 + 4h^2)}{2h}.$$

Damit

$$\boxed{v_0(h, l) = \sqrt{\frac{g(l^2 + 4h^2)}{2h}}}.$$

Einheitencheck: g in m/s^2 , h, l in $\text{m} \Rightarrow v_0$ in m/s daher korrekt.

2.3 Kurioses

Schon Aristoteles glaubte, dass geworfene Körper sich zunächst geradeaus und anschließend senkrecht nach unten bewegen. Erst Galileo Galilei zeigte im 17. Jahrhundert, dass die Bewegung aus der Überlagerung eines gleichförmigen horizontalen und eines gleichmäßig beschleunigten vertikalen Anteils besteht und die Bahn somit eine Parabel ist.

3 Rakete

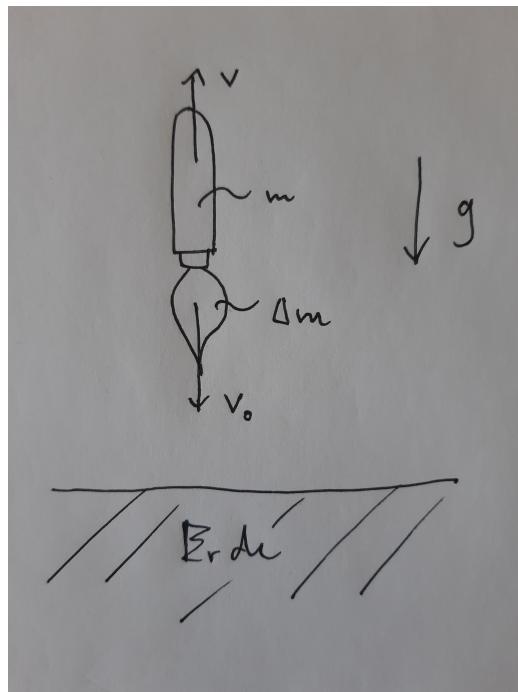
Aufgabe 3 Raketensproblem

Eine Rakete der Masse $m(t)$ bewege sich mit einer Geschwindigkeit $v(t)$ zum Zeitpunkt t von der Erde weg senkrecht nach oben. Es wird ein homogenes Schwerefeld angenommen und der Einfluss des Luftwiderstandes wird vernachlässigt. Die Rakete der Anfangsmasse m_0 stößt pro Zeiteinheit die Gasmengen $\alpha = \frac{\Delta m}{\Delta t} > 0$ mit konstanter Geschwindigkeit v_0 (relativ zur Rakete) nach unten aus. Siehe Abbildung.

- a) Zeige, dass die Bewegungsgleichung der Rakete die folgende Form hat

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt} v_0 - mg = \alpha v_0 - mg.$$

- b) Integriere die Bewegungsgleichung, um einen Ausdruck für $v(m)$ zu erhalten. Die Anfangsgeschwindigkeit der Rakete sei $v(m_0) = 0$.
- c) Schätze ab, wieviel mal größer die Anfangsmasse der Rakete m_0 gegenüber der Masse der leeren Rakete sein muss, um die Fluchtgeschwindigkeit von der Erde $v_2 = 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ für die Parameter $v_0 = 2,1 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ und $\alpha = \frac{m_0}{60 \text{ s}}$ zu erreichen.
- d) Berechne $v(t)$ aus $v(m)$ mit Hilfe von $m(t) = m_0 - \alpha t$ und entwickle $v(t)$ für kleine Zeiten. Diskutiere das Ergebnis. *Hinweis:* $\ln(1 + x) \approx x$ für $|x| < 1$



Federführende Dokumentation: Max Lauer

3.1 Hintergrund

Das Raketenproblem gibt es logischerweise länger als es Raketen gibt. Für die Lösung eben dieses ist nicht mehr von Nöten als die Newtonschen Gesetze. Das bedeutet, dass es das Raketenproblem seit dem 17. Jahrhundert gibt. Damals konnte man sich sicherlich noch nicht ausmalen, dass die Rechnerei 250 Jahre später den Menschen auf den Mond verhelfen wird. Erstmalig tauchte 1810 eine Lösung des Raketenproblems in einem Journal auf. Diese stammte vom britischen Mathematiker William Moore.

3.2 Musterlösung

a) Nach Newtons zweitem Gesetz gilt für die Kraft:

$$\frac{dp}{dt} = F \quad (3a)$$

$$\Leftrightarrow m \frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt} v = -mg + F'. \quad (3b)$$

F' bezeichnet hier die Kraft die das ausgestoßene Gas auf die Rakete ausübt.

Der Impuls des ausgestoßenen Gases beträgt:

$$\Delta p = \Delta m(v - v_0).$$

Teilt man diese Gleichung jetzt auf beiden Seiten durch Δt , erhält man:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t}(v - v_0).$$

Links und rechts auf der Seite dieser Gleichung stehen nun also eine Kraft, nämlich die Kraft, die auf die ausgestoßenen Gasteilchen wirkt. nach Newtons 3. Gesetz (*actio=reactio*) wirkt die entgegengesetzte Kraft auf die Rakete:

$$F' = -\alpha(v - v_0). \quad (4)$$

Setzt man nun Gl. (4) in Gl. (3b) ein so erhält man folgende Bewegungsgleichung:

$$m \frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt} v = -mg - \alpha(v - v_0).$$

Die Gesamtmasse der Rakete ist:

$$m(t) = m_0 - \alpha t \rightarrow \frac{dm}{dt} = -\alpha \quad (5)$$

Setzt man Gl. (5) in die Bewegungsgleichung ein, so erhält man die gesuchte Form:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - \frac{dm}{dt} v_0 = -mg + \alpha v_0.$$

b) Nun wollen wir einen Ausdruck für $v(m)$ finden. Dazu müssen wir aus unserer DGL die Variable t entfernen. Es gilt:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dm} \frac{dm}{dt} = -\alpha \frac{dv}{dm}.$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} -\alpha \frac{dv}{dm} &= -mg + \alpha v_0 \\ \Leftrightarrow dv &= \frac{g}{\alpha} dm - \frac{v_0}{m} dm. \end{aligned}$$

Durch beidseitige Integration erhalten wir den Ausdruck für $v(m)$:

$$v(m) = \frac{g}{\alpha} m - v_0 \ln(m) + C.$$

C ist dabei die Integrationskonstante. Diese wird durch die Anfangsbedingung $v(m_0) = 0$ festgelegt. Nach Einsetzen der Anfangsbedingung erhält man als Lösung für $v(m)$:

$$v(m) = \frac{g}{\alpha} (m - m_0) - v_0 \ln \left(\frac{m}{m_0} \right). \quad (6)$$

c) Wir machen Gebrauch von der Abschätzung, dass $\frac{m}{m_0} \ll 1$ ist. Setzen wir alle gegebenen Werte in unsere Gleichung ein, so erhalten wir:

$$v_2 = g 60 s \left(\frac{m}{m_0} - 1 \right) - v_0 \ln \left(\frac{m}{m_0} \right)$$

Aufgrund unserer Abschätzung können wir den Term $m/(m_0)$, der nicht im Logarithmus steht vernachlässigen. Ohne diesen Term erhalten wir eine analytisch-lösbare Gleichung mit der Lösung:

$$\frac{m}{m_0} \approx 274.$$

Das bedeutet, dass die Startmasse der Rakete ungefähr 274-Mal so schwer sein muss wie die Rakete beim Verlassen der Erde.

d) Zunächst setzen wir in Gl. (6) $v(m) = v(m(t))$ mit $m(t)$ wie in Gl. (5):

$$v(m(t)) = -gt - v_0 \ln \left(1 - \frac{\alpha t}{m_0} \right).$$

Mithilfe der Näherung für kleine t aus der Aufgabenstellung ergibt sich dadurch:

$$v(m(t)) \approx t \left(v_0 \frac{\alpha}{m_0} - g \right).$$

3.3 Kurioses

Das deutsche V-2-Raketen-Testmodell MW 18014 erreichte im Juni 1944 als erstes von Menschen geschaffenes Objekt den Weltraum. Sputnik 1, gestartet von der Sowjetunion am 4. Oktober 1957, war der erste künstliche Erdsatellit und gilt als Beginn der modernen Raumfahrt. Der sowjetische Kosmonaut Juri Gagarin wurde am 12. April 1961 mit der Wostok 1 Rakete als erster Mensch ins All befördert. All das, ohne Newtons Gesetze unerreichbar (dieser Satz ergibt auch mehr oder weniger Sinn, wenn das Komma ein Wort vorangestellt wird, und ein passend gewähltes Verb den Satz vervollständigt).

4 Zylinder- und Kugelkoordinaten

Aufgabe 4 Zylinder- und Kugelkoordinaten

- a) Es gelten folgenden Umrechnungsregeln zwischen Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) und kartesische Koordinaten (x, y, z) :

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos(\varphi) \\ y &= \rho \sin(\varphi). \end{aligned}$$

Bestimmen die (normierte) Basis $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$ der Zylinderkoordinaten, das Wegelement, die Jacobi-Determinante und das Volumenelement. Überzeuge dich, dass es sich um eine rechtshändige Orthonormalbasis handelt.

- b) Eine Bahnkurve sei gegeben durch $\mathbf{r}(t) = \rho(t)\mathbf{e}_\rho(t) + z(t)\mathbf{e}_z$. Gib die Ausdrücke für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung in Zylinderkoordinaten an.
- c) Wiederhole die Rechnungen aus a) und b) für Kugelkoordinaten (r, θ, φ) , für die folgende Umrechnungsregeln gelten:

$$\begin{aligned} x &= r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ y &= r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z &= r \cos(\theta). \end{aligned}$$

Federführende Dokumentation: Lucca Saar

4.1 Hintergrund

4.2 Musterlösung

a) Zylinderkoordinaten: Basisvektoren und Volumenelement

Gegeben sind die Umrechnungsregeln zwischen Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) und kartesischen Koordinaten (x, y, z) :

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, \\ y &= \rho \sin \varphi, \\ z &= z. \end{aligned}$$

Wir betrachten den Ortsvektor in kartesischer Darstellung

$$\vec{r}(x, y, z) = x \hat{\mathbf{e}}_x + y \hat{\mathbf{e}}_y + z \hat{\mathbf{e}}_z.$$

Setzt man die Umrechnungsvorschriften ein, so erhält man

$$\vec{r}(\rho, \varphi, z) = \rho \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_x + \rho \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_y + z \hat{\mathbf{e}}_z.$$

Die Koordinatenlinien erhält man, indem man jeweils eine Koordinate variiert und die anderen festhält. Die zugehörigen (nicht normierten) Basisvektoren sind die partiellen Ableitungen von \vec{r} nach den Koordinaten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} &= \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_x + \rho \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_y + z \hat{\mathbf{e}}_z) \\ &= \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_x + \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_y + 0 \cdot \hat{\mathbf{e}}_z, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_x + \rho \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_y + z \hat{\mathbf{e}}_z) \\ &= -\rho \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_x + \rho \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_y + 0 \cdot \hat{\mathbf{e}}_z, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_x + \rho \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_y + z \hat{\mathbf{e}}_z) \\ &= 0 \cdot \hat{\mathbf{e}}_x + 0 \cdot \hat{\mathbf{e}}_y + 1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_z. \end{aligned}$$

Die Längen dieser Vektoren sind

$$\begin{aligned} h_\rho &= \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right\| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1, \\ h_\varphi &= \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right\| = \sqrt{(-\rho \sin \varphi)^2 + (\rho \cos \varphi)^2} = \sqrt{\rho^2(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} = \rho, \\ h_z &= \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right\| = 1. \end{aligned}$$

Die normierten Basisvektoren erhält man durch Division durch die jeweilige Länge:

$$\begin{aligned} \hat{e}_\rho &= \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \cos \varphi \hat{e}_x + \sin \varphi \hat{e}_y, \\ \hat{e}_\varphi &= \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \frac{1}{\rho} (-\rho \sin \varphi \hat{e}_x + \rho \cos \varphi \hat{e}_y) = -\sin \varphi \hat{e}_x + \cos \varphi \hat{e}_y, \\ \hat{e}_z &= \frac{1}{h_z} \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \hat{e}_z. \end{aligned}$$

Damit haben wir die orthonormale Basis der Zylinderkoordinaten gefunden:

$$(\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_z).$$

Orthonormalität: Wir überprüfen die Skalarprodukte explizit.

$$\begin{aligned} \hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\rho &= (\cos \varphi \hat{e}_x + \sin \varphi \hat{e}_y) \cdot (\cos \varphi \hat{e}_x + \sin \varphi \hat{e}_y) \\ &= \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1, \end{aligned}$$

analog

$$\begin{aligned} \hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_\varphi &= (-\sin \varphi \hat{e}_x + \cos \varphi \hat{e}_y) \cdot (-\sin \varphi \hat{e}_x + \cos \varphi \hat{e}_y) \\ &= \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1, \end{aligned}$$

und offensichtlich

$$\hat{e}_z \cdot \hat{e}_z = 1.$$

Die gemischten Produkte

$$\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\varphi = 0, \quad \hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_z = 0, \quad \hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_z = 0$$

folgen direkt, da $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ orthonormal sind.

Rechtshändigkeit: Wir berechnen das Kreuzprodukt

$$\hat{e}_\rho \times \hat{e}_\varphi = (\cos \varphi \hat{e}_x + \sin \varphi \hat{e}_y) \times (-\sin \varphi \hat{e}_x + \cos \varphi \hat{e}_y).$$

Verwendet man $\hat{e}_x \times \hat{e}_y = \hat{e}_z$ und $\hat{e}_y \times \hat{e}_x = -\hat{e}_z$, erhält man

$$\begin{aligned} \hat{e}_\rho \times \hat{e}_\varphi &= \cos \varphi \cos \varphi (\hat{e}_x \times \hat{e}_y) + \sin \varphi (-\sin \varphi) (\hat{e}_y \times \hat{e}_x) \\ &= (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \hat{e}_z = \hat{e}_z. \end{aligned}$$

Damit ist das Tripel $(\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_z)$ rechtshändig.

Volumenelement: Das Volumenelement ergibt sich aus dem Betrag der Jacobi-Determinante $\det(\partial(x, y, z)/\partial(\rho, \varphi, z))$.

Die Jacobi-Matrix ist

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante ist

$$\begin{aligned} \det J &= 1 \cdot \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (\cos \varphi \cdot \rho \cos \varphi - (-\rho \sin \varphi) \cdot \sin \varphi) \\ &= \rho(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$dV = |\det J| d\rho d\varphi dz = \rho d\rho d\varphi dz.$$

b) Bewegung in Zylinderkoordinaten

Die Bahnkurve sei gegeben durch

$$\vec{r}(t) = \rho(t) \hat{\mathbf{e}}_\rho(t) + z(t) \hat{\mathbf{e}}_z.$$

Beachte: $\hat{\mathbf{e}}_\rho$ hängt über den Winkel $\varphi(t)$ von der Zeit ab, $\hat{\mathbf{e}}_z$ ist konstant.

Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit ist die Zeitableitung des Ortsvektors:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\rho(t) \hat{\mathbf{e}}_\rho(t) + z(t) \hat{\mathbf{e}}_z \right) \\ &= \dot{\rho}(t) \hat{\mathbf{e}}_\rho(t) + \rho(t) \dot{\hat{\mathbf{e}}}_\rho(t) + \dot{z}(t) \hat{\mathbf{e}}_z, \end{aligned}$$

wobei Punkte die Ableitung nach der Zeit bedeuten.

Um $\dot{\hat{\mathbf{e}}}_\rho$ zu bestimmen, schreiben wir $\hat{\mathbf{e}}_\rho$ explizit in kartesischen Komponenten:

$$\hat{\mathbf{e}}_\rho(t) = \cos \varphi(t) \hat{\mathbf{e}}_x + \sin \varphi(t) \hat{\mathbf{e}}_y.$$

Ableitung nach der Zeit:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{e}}}_\rho(t) &= -\sin \varphi(t) \dot{\varphi}(t) \hat{\mathbf{e}}_x + \cos \varphi(t) \dot{\varphi}(t) \hat{\mathbf{e}}_y \\ &= \dot{\varphi}(t) (-\sin \varphi(t) \hat{\mathbf{e}}_x + \cos \varphi(t) \hat{\mathbf{e}}_y). \end{aligned}$$

Der Vektor in Klammern ist genau $\hat{\mathbf{e}}_\varphi(t)$, also

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_\rho = \dot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi.$$

Die Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ und $\hat{\mathbf{e}}_z$ sind bezüglich φ beziehungsweise z definiert; für $\hat{\mathbf{e}}_z$ gilt $\dot{\hat{\mathbf{e}}}_z = 0$. Einsetzen in \vec{v} :

$$\vec{v}(t) = \dot{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\rho + \rho \dot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \dot{z} \hat{\mathbf{e}}_z.$$

Dies ist die Geschwindigkeit in Zylinderkoordinaten.

Beschleunigung. Nun bestimmen wir die zweite Ableitung:

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\rho + \rho \dot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \dot{z} \hat{\mathbf{e}}_z) \\ &= \ddot{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\rho + \dot{\rho} \dot{\hat{\mathbf{e}}}_\rho + \rho \ddot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \rho \dot{\varphi} \dot{\hat{\mathbf{e}}}_\varphi + \ddot{z} \hat{\mathbf{e}}_z. \end{aligned}$$

Wir kennen bereits $\dot{\hat{\mathbf{e}}}_\rho = \dot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi$. Analog bestimmen wir $\dot{\hat{\mathbf{e}}}_\varphi$:

$$\hat{\mathbf{e}}_\varphi(t) = -\sin \varphi(t) \hat{\mathbf{e}}_x + \cos \varphi(t) \hat{\mathbf{e}}_y.$$

Ableitung:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{e}}}_\varphi(t) &= -\cos \varphi(t) \dot{\varphi}(t) \hat{\mathbf{e}}_x - \sin \varphi(t) \dot{\varphi}(t) \hat{\mathbf{e}}_y \\ &= -\dot{\varphi}(t) (\cos \varphi(t) \hat{\mathbf{e}}_x + \sin \varphi(t) \hat{\mathbf{e}}_y) \\ &= -\dot{\varphi}(t) \hat{\mathbf{e}}_\varphi(t). \end{aligned}$$

Also

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_\varphi = -\dot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \ddot{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\rho + \dot{\rho} \dot{\hat{\mathbf{e}}}_\rho + \dot{\rho} \dot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \rho \ddot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \rho \dot{\varphi} (-\dot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_\rho) + \ddot{z} \hat{\mathbf{e}}_z \\ &= \ddot{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\rho + 2\dot{\rho} \dot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \rho \ddot{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi - \rho \dot{\varphi}^2 \hat{\mathbf{e}}_\rho + \ddot{z} \hat{\mathbf{e}}_z. \end{aligned}$$

Wir fassen die Komponenten zusammen:

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \hat{\mathbf{e}}_\rho + (\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}) \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \ddot{z} \hat{\mathbf{e}}_z.$$

c) Kugelkoordinaten

Die Umrechnung in Kugelkoordinaten (r, θ, φ) lautet

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\z &= r \cos \theta.\end{aligned}$$

Ortsvektor und nicht normierte Basisvektoren. Der Ortsvektor ist

$$\vec{r} = x \hat{e}_x + y \hat{e}_y + z \hat{e}_z = r \sin \theta \cos \varphi \hat{e}_x + r \sin \theta \sin \varphi \hat{e}_y + r \cos \theta \hat{e}_z.$$

Die partiellen Ableitungen nach den Kugelkoordinaten sind

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} &= \sin \theta \cos \varphi \hat{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{e}_y + \cos \theta \hat{e}_z, \\\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} &= r \cos \theta \cos \varphi \hat{e}_x + r \cos \theta \sin \varphi \hat{e}_y - r \sin \theta \hat{e}_z, \\\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= -r \sin \theta \sin \varphi \hat{e}_x + r \sin \theta \cos \varphi \hat{e}_y + 0 \cdot \hat{e}_z.\end{aligned}$$

Die Längen dieser Vektoren:

$$\begin{aligned}h_r &= \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right\| = \sqrt{\sin^2 \theta(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \cos^2 \theta} = \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = 1, \\h_\theta &= \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right\| = \sqrt{r^2(\cos^2 \theta(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \sin^2 \theta)} = \sqrt{r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = r, \\h_\varphi &= \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right\| = \sqrt{r^2 \sin^2 \theta(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} = r \sin \theta.\end{aligned}$$

Normierte Basisvektoren. Durch Normierung erhalten wir

$$\begin{aligned}\hat{e}_r &= \frac{1}{h_r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{1}{1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \sin \theta \cos \varphi \hat{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{e}_y + \cos \theta \hat{e}_z, \\\hat{e}_\theta &= \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \\&= \cos \theta \cos \varphi \hat{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \hat{e}_y - \sin \theta \hat{e}_z, \\\hat{e}_\varphi &= \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \\&= -\sin \varphi \hat{e}_x + \cos \varphi \hat{e}_y.\end{aligned}$$

Damit ist

$$(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi)$$

eine orthonormale Basis in Kugelkoordinaten. Analog wie oben zeigt man $\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r = 1$ etc. und $\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \hat{e}_\varphi$, also Rechtshändigkeit.

Volumenelement. Die Jacobi-Matrix $\partial(x, y, z)/\partial(r, \theta, \varphi)$ hat Determinante $\det J = r^2 \sin \theta$. Damit

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

Bewegung. Eine Bahnkurve in Kugelkoordinaten kann als

$$\vec{r}(t) = r(t) \hat{e}_r(t)$$

geschrieben werden. Mit der Standardrechnung (analog zu Teil b) erhält man:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi, \\\vec{a} &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \hat{e}_r \\&\quad + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2) \hat{e}_\theta \\&\quad + (r \sin \theta \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \sin \theta \dot{\varphi} + 2r \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi}) \hat{e}_\varphi.\end{aligned}$$

4.3 Kurioses

5 Atwoodsche Fallmaschine

Aufgabe 5 Atwoodsche Fallmaschine

Zwei Massen m_1, m_2 hängen an einem nicht dehnbaren Faden der Länge l über einer festen Rolle im Schwerefeld der Erde senkrecht nach unten. Die Rolle und der Faden werden als masse- und reibungsfrei betrachtet.

- Skizziere das System und trage alle relevanten Größen und Variablen ein.
- Analysiere das System mit Hilfe der Newtonschen Mechanik:
 - Benenne alle Kräfte, die auf die beiden Massen wirken.
 - Leite eine Bewegungsgleichung für z_1 her.
- Analysiere das System mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen zweiter Art:
 - Schreibe die Lagrange-Funktion $L(z_1, z_2, \dot{z}_1, \dot{z}_2) = T - V$ für das System ohne Berücksichtigung der Zwangsbedingung auf.
 - Wähle eine geeignete generalisierte Koordinate q aus, die die Zwangsbedingung berücksichtigt, und drücke $L(q, \dot{q})$ in dieser Koordinate aus.
 - Stelle die Lagrange-Gleichung 2. Art auf.
- Löse die Bewegungsgleichung.
- Nimm an, dass für $t = 0$ beide Massen in 12m Höhe als Ruhelage ($v(0) = 0$) hängen. Berechne – für die Parameter, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $m_1 = 12 \text{ kg}$ und $m_2 = 48 \text{ kg}$ die Zeit t , bis zum Auftreffen der schwereren Massen auf dem Boden.
- Berechne die Geschwindigkeit v der Masse m_2 beim Auftreffen auf den Boden.

Federführende Dokumentation: Lucca Saar

5.1 Hintergrund

5.2 Musterlösung

a) Skizze

b) Newtonsche Herleitung der Bewegungsgleichung

1. Kräfte. Auf jede Masse wirkt

- die Gewichtskraft $m_i g$ nach unten,
- die Seilspannung T nach oben.

Wir wählen die positive Richtung nach unten.

2. Bewegungsgleichung für z_1 . Für die Masse m_1 gilt die zweite Newtonsche Gleichung:

$$m_1 \ddot{z}_1 = m_1 g - T.$$

Für die Masse m_2 entsprechend:

$$m_2 \ddot{z}_2 = m_2 g - T.$$

Die Zwangsbedingung

$$z_1 + z_2 = l$$

impliziert nach zweimaliger Ableitung

$$\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{z}_2 = -\ddot{z}_1.$$

Aus der Gleichung für m_1 folgt

$$T = m_1 g - m_1 \ddot{z}_1.$$

Setzen wir dies in die Gleichung für m_2 ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{z}_2 &= m_2 g - T = m_2 g - (m_1 g - m_1 \ddot{z}_1) \\ &= (m_2 - m_1)g + m_1 \ddot{z}_1. \end{aligned}$$

Mit $\ddot{z}_2 = -\ddot{z}_1$ folgt

$$m_2(-\ddot{z}_1) = (m_2 - m_1)g + m_1 \ddot{z}_1.$$

Wir bringen alle Terme mit \ddot{z}_1 auf die linke Seite:

$$-m_2 \ddot{z}_1 - m_1 \ddot{z}_1 = (m_2 - m_1)g.$$

Links klammern wir \ddot{z}_1 aus:

$$-(m_1 + m_2)\ddot{z}_1 = (m_2 - m_1)g.$$

Multiplikation mit -1 ergibt

$$(m_1 + m_2)\ddot{z}_1 = (m_1 - m_2)g.$$

Also

$$\ddot{z}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Entsprechend folgt aus $\ddot{z}_2 = -\ddot{z}_1$

$$\ddot{z}_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g.$$

Für $m_2 > m_1$ ist $\ddot{z}_2 > 0$, die schwerere Masse bewegt sich nach unten.

c) Lagrange-Formalismus

1. Lagrange-Funktion mit Koordinaten z_1, z_2 . Die kinetische Energie ist

$$T = \frac{1}{2}m_1 \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{z}_2^2.$$

Mit der Wahl der Nullhöhe an der Rolle ist die potentielle Energie

$$V = m_1 g z_1 + m_2 g z_2.$$

Also

$$L(z_1, z_2, \dot{z}_1, \dot{z}_2) = T - V = \frac{1}{2}m_1 \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{z}_2^2 - m_1 g z_1 - m_2 g z_2.$$

2. Einführung einer generalisierten Koordinate. Die Zwangsbedingung lautet

$$z_1 + z_2 = l.$$

Wir wählen

$$q(t) := z_1(t)$$

als generalisierte Koordinate. Dann ist

$$z_2 = l - q, \quad \dot{z}_2 = -\dot{q}.$$

Wir setzen dies in T und V ein.

Zuerst die kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1 \dot{q}^2 + \frac{1}{2}m_2 (-\dot{q})^2 = \frac{1}{2}m_1 \dot{q}^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{q}^2 \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \dot{q}^2. \end{aligned}$$

Dann die potentielle Energie:

$$\begin{aligned} V &= m_1 g q + m_2 g (l - q) \\ &= m_1 g q + m_2 g l - m_2 g q \\ &= g(m_1 - m_2)q + m_2 g l. \end{aligned}$$

Die Lagrange-Funktion in der Koordinate q ist

$$\begin{aligned} L(q, \dot{q}) &= T - V \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \dot{q}^2 - g(m_1 - m_2)q - m_2 g l. \end{aligned}$$

Die Konstante $-m_2 g l$ spielt für die Bewegungsgleichung keine Rolle.

3. Lagrange-Gleichung 2. Art. Die Euler-Lagrange-Gleichung lautet

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Zunächst

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} &= (m_1 + m_2)\dot{q}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) &= (m_1 + m_2)\ddot{q}. \end{aligned}$$

Weiter

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -g(m_1 - m_2).$$

Damit wird die Lagrange-Gleichung zu

$$(m_1 + m_2)\ddot{q} - (-g(m_1 - m_2)) = 0,$$

also

$$(m_1 + m_2)\ddot{q} + g(m_1 - m_2) = 0.$$

Wir lösen nach \ddot{q} auf:

$$\ddot{q} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g.$$

Da $q = z_1$ ist, stimmt dies mit dem Ergebnis aus Teil b) überein.

d) Lösung der Bewegungsgleichung

Die Gleichung

$$\ddot{q} = a, \quad a := \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g = \text{konstant},$$

ist die eines gleichmäßig beschleunigten Systems.

Die allgemeine Lösung lautet

$$q(t) = q(0) + \dot{q}(0)t + \frac{1}{2}at^2.$$

Schreibt man wieder z_1 statt q , so ist

$$z_1(t) = z_1(0) + \dot{z}_1(0)t + \frac{1}{2} \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g t^2.$$

Wegen $z_2 = l - z_1$ folgt

$$z_2(t) = l - z_1(0) - \dot{z}_1(0)t - \frac{1}{2} \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g t^2.$$

e) Einschalten der Anfangsbedingungen und Zeit bis zum Aufprall

Gegeben ist: Zu $t = 0$ hängen beide Massen in Ruhe in 12 m Höhe über dem Boden. Wir interessieren uns für die Zeit, bis die schwerere Masse m_2 den Boden erreicht.

Es ist praktisch, für m_2 eine neue Koordinate

$s(t) :=$ Weg der Masse m_2 nach unten, gemessen ab ihrer Anfangslage

einzuführen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} s(0) &= 0, \\ \dot{s}(0) &= 0, \\ \ddot{s} &= a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g. \end{aligned}$$

Mit $s = 0$ am Anfang und Endpunkt $s = 12$ m beim Auftreffen auf den Boden.

Die Bewegungsgleichung ist also

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2,$$

da $s(0) = 0$ und $\dot{s}(0) = 0$.

Wir setzen $s(t_{\text{Boden}}) = 12 \text{ m}$:

$$12 = \frac{1}{2} a t_{\text{Boden}}^2 = \frac{1}{2} \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g t_{\text{Boden}}^2.$$

Einsetzen von $g = 10 \text{ m/s}^2$, $m_1 = 12 \text{ kg}$, $m_2 = 48 \text{ kg}$:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g = \frac{48 - 12}{48 + 12} \cdot 10 = \frac{36}{60} \cdot 10 = 0,6 \cdot 10 = 6 \text{ m/s}^2.$$

Damit

$$12 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot t_{\text{Boden}}^2 = 3t_{\text{Boden}}^2.$$

Also

$$t_{\text{Boden}}^2 = \frac{12}{3} = 4 \quad \Rightarrow \quad t_{\text{Boden}} = 2 \text{ s}.$$

f) Geschwindigkeit beim Auftreffen

Die Geschwindigkeit von m_2 zum Zeitpunkt t_{Boden} ergibt sich aus

$$v(t) = \dot{s}(t) = at.$$

Für $t = t_{\text{Boden}} = 2 \text{ s}$ und $a = 6 \text{ m/s}^2$:

$$v_{\text{Boden}} = at_{\text{Boden}} = 6 \text{ m/s}^2 \cdot 2 \text{ s} = 12 \text{ m/s}.$$

Die schwerere Masse m_2 trifft den Boden also mit einer Geschwindigkeit von

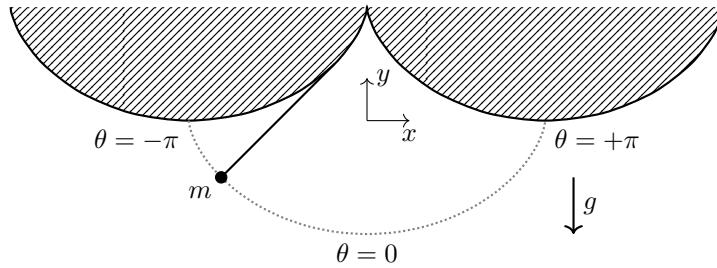
$$v_{\text{Boden}} = 12 \text{ m/s}.$$

5.3 Kurioses

6 Zykloidenpendel

Aufgabe 6 Zykloidenpendel

Betrachte eine Masse m , deren Bewegung im homogenen Erdschwerefeld g auf eine Zykloide eingeschränkt ist.



Der Ortsvektor der Masse ist parametrisiert durch $-\pi \leq \theta \leq \pi$ als $\mathbf{r} = R \begin{pmatrix} \theta + \sin \theta \\ -1 - \cos \theta \end{pmatrix}$ gegeben, wobei $0 < R = \text{const.}$ ist.

a) Stell die Lagrange-Funktion des Systems auf. Wähle dabei θ als generalisierte Variable q .

b) Leite folgende Bewegungsgleichung für die Masse m her:

$$\frac{d^2}{dt^2} \sin \frac{q}{2} + \frac{g}{4R} \sin \frac{q}{2} = 0.$$

Hinweis: Die Halbwinkelidentitäten $2 \cos^2 \frac{q}{2} = (1 + \cos q)$ und $\sin q = 2 \sin \frac{q}{2} \cos \frac{q}{2}$ können hilfreich sein.

c) Wie lautet eine geeignete Variablentransformation, um die Bewegungsgleichung in die eines harmonischen Oszillators zu überführen? Wie lautet die entsprechende Periode?

d) Gib die Lösung $q(t)$ an.

Hinweis: Verwende dein Wissen über die Lösung des harmonischen Oszillators.

Federführende Dokumentation: Max Lauer

6.1 Hintergrund

Als Hintergrund dieser Aufgabe dient lediglich die Lagrangemechanik. Dies ist eine wunderschöne Aufgabe um den Lagrange-Formalismus zweiter Art und die harmonische Schwingung einzuüben.

6.2 Musterlösung

a) Wir berechnen zunächst den Betrag der Geschwindigkeit v und damit unsere kinetische Energie T :

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \\ v^2 &= (R(\dot{\theta} + \dot{\theta} \cos(\theta))^2 + (R\dot{\theta} \sin(\theta))^2 = 2R^2\dot{\theta}^2(1 + \cos(\theta)) \\ \Rightarrow T &= \frac{m}{2}\dot{v}^2 = mR^2\dot{\theta}^2(1 + \cos(\theta)) \end{aligned}$$

Unser Potential hängt nur von der Höhe ab, also von y :

$$V = mgh = mgR(-1 - \cos(\theta))$$

Daraus erhalten wir die Lagrangefunktion $T - V$:

$$\mathcal{L} = mR(1 + \cos(\theta))(R\dot{\theta}^2 + g)$$

b) Wir benutzen die Lagrange Gleichung zweiter Art:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\ddot{\theta}mR^2(1 + \cos(\theta)) - 2mR^2\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + mR \sin(\theta)(R\dot{\theta}^2 + g) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2mR^2((1 + \cos(\theta))\ddot{\theta} - \sin(\theta)\dot{\theta}^2) + mR\sin(\theta)(R\dot{\theta}^2 + g) = 0$$

Nun schreiben wir diesen Ausdruck mithilfe der Hinweise in der Aufgabenstellung um:

$$2mR^2(2\cos^2(\frac{\theta}{2})\ddot{\theta} - 2\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2})\dot{\theta}^2) + 2mR\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2})(R\dot{\theta}^2 + g) = 0$$

Nun dividieren wir beide Seiten der Gleichung durch $2mR^2\cos(\frac{\theta}{2})$ und erhalten:

$$2\ddot{\theta}\cos(\frac{\theta}{2}) - \dot{\theta}^2\sin(\frac{\theta}{2}) + \frac{g}{R}\sin(\frac{\theta}{2}) = 0$$

Durch scharfes Hinsehen, entdeckt man:

$$2\ddot{\theta}\cos(\frac{\theta}{2}) - \dot{\theta}^2\sin(\frac{\theta}{2}) = 4\frac{d^2}{dt^2}\sin(\frac{\theta}{2})$$

Daraus ergibt sich nun die gesuchte DGL für die Masse m:

$$\frac{d^2}{dt^2}\sin(\frac{\theta}{2}) + \frac{g}{4R}\sin(\frac{\theta}{2}) = 0$$

c) Die Variablentransformation lautet:

$$x := \sin(\frac{\theta}{2})$$

Die DGL lautet dann:

$$\ddot{x} = -\frac{g}{4R}x$$

Die entsprechende Periode der Schwingung lautet:

$$\omega := \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{R}}$$

d) Die allgemeine Lösung lautet:

$$x(t) = \sin(\frac{\theta}{2})(t) = A \exp(i\omega t) + B \exp(-i\omega t)$$

Mit komplexen Vorfaktoren A und B. Dies können wir noch nach $\theta(t)$ umformen:

$$\theta(t) = 2 \arcsin(A \exp(i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{R}}t) + B \exp(-i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{R}}t))$$

6.3 Kurioses

Im Gegensatz zum mathematischen Pendel ist das Zykloidenpendel exakt harmonisch. Das bedeutet, dass die Schwingungsfrequenz unabhängig von der Auslenkung ist. Beim mathematischen Pendel ist dies nur für kleine Auslenkungswinkel gegeben. Dies verschafft dem Zykloidenpendel einen großen Vorteil wenn es um den Verbau in beispielsweise Uhren geht. Die Pendelbewegung ist dann nämlich mit dem Uhrwerk verbunden. Bei jedem Durchgang löst die Schwingung eine Bewegung im Uhrwerk aus, die die Zeitanzeige weiterschaltet. Genial, nicht wahr?

7 Kraftfelder und Arbeit

Aufgabe 7 Kraftfelder und Arbeit

Betrachte das Kraftfeld

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} k_1 y \\ k_1 x \\ 2k_2 z \end{pmatrix}$$

- a) Zeige, dass es sich um eine konservative Kraft handelt, und bestimme das Potenzial V .
- b) Berechne die Arbeit, die bei einer Bewegung von $(0, 0, 0)^T$ nach $(r, r, r)^T$ verrichtet wird.
- c) Zeige, dass alle Zentralkraftfelder, also Kraftfelder der Form $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r) \mathbf{e}_r$ mit einer skalaren Funktion f , $r \equiv |\mathbf{r}|$ und dem Einheitsvektor $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$, stets von einem Potenzial V abgeleitet werden können.
- d) Betrachte ein Teilchen mit Koordinate \mathbf{r} und Masse m , das einer allgemeinen (ortsabhängigen) Kraft \mathbf{F} unterliegt. Die kinetische Energie ist durch $T = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2$ gegeben. Nimm an, dass sich das Teilchen zum Anfangszeitpunkt t_i am Ort $\mathbf{r}(t_i)$ und zum Endzeitpunkt t_f am Ort $\mathbf{r}(t_f)$ befindet. Zeige, dass die Arbeit

$$W = \int_{\mathbf{r}(t_i)}^{\mathbf{r}(t_f)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

die durch die Kraft verrichtet wird, durch die Differenz der kinetischen Energie vom Anfangs- und Endzeitpunkt gegeben ist.

Federführende Dokumentation: Lucca Saar

7.1 Hintergrund

7.2 Musterlösung

(a) Konservativität und Potential V

Ziel. Wir prüfen $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. In einer einfach zusammenhängenden Domäne (hier: ganz \mathbb{R}^3) ist das äquivalent zur Existenz eines Potentials V mit $\mathbf{F} = -\nabla V$.

Schritt 1: Rotation komponentenweise. Für $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ gilt

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix}.$$

Mit $F_x = k_1 y$, $F_y = k_1 x$, $F_z = 2k_2 z$ erhalten wir

$$\partial_y F_z = 0, \partial_z F_y = 0, \partial_z F_x = 0, \partial_x F_z = 0, \partial_x F_y = k_1, \partial_y F_x = k_1.$$

Damit

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ k_1 - k_1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Schritt 2: Schluss \Rightarrow konservativ. Da $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ in \mathbb{R}^3 und \mathbb{R}^3 einfach zusammenhängend ist, ist \mathbf{F} konservativ.

Schritt 3: Potential V konstruieren aus $\mathbf{F} = -\nabla V$. Wir lösen

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = F_x = k_1 y, \quad -\frac{\partial V}{\partial y} = F_y = k_1 x, \quad -\frac{\partial V}{\partial z} = F_z = 2k_2 z.$$

(i) Integration nach x :

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = k_1 y \Rightarrow V(x, y, z) = -k_1 xy + f(y, z),$$

wobei f eine (vorerst) unbekannte Funktion ist, die von y, z abhängen kann.

(ii) Vergleich mit $-\partial V / \partial y = k_1 x$:

$$-\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(-k_1 xy + f(y, z)) = k_1 x - \frac{\partial f}{\partial y} = k_1 x.$$

Also $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, d. h. f hängt nicht von y ab: $f = f(z)$.

(iii) Vergleich mit $-\partial V / \partial z = 2k_2 z$:

$$-\frac{\partial f}{\partial z} = 2k_2 z \Rightarrow f(z) = -k_2 z^2 + C.$$

Ergebnis.

$$V(x, y, z) = -k_1 xy - k_2 z^2 + C$$

für eine beliebige Konstante C . (Kontrolle: $-\nabla V = (k_1 y, k_1 x, 2k_2 z) = \mathbf{F}$.)

(b) Arbeit von $(0, 0, 0)^T$ nach $(r, r, r)^T$

Für konservative Felder ist die Arbeit wegunabhängig und

$$W = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = V(\text{Start}) - V(\text{Ziel}).$$

Mit $C = 0$ genügt

$$V(0, 0, 0) = 0, \quad V(r, r, r) = -(k_1 + k_2)r^2.$$

Daraus

$$W = (k_1 + k_2) r^2.$$

(c) Zentralkräfte sind konservativ

Sei $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r) \mathbf{e}_r$ mit $r = \|\mathbf{r}\|$ und $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$. Definiere

$$V(r) = - \int^r f(s) ds.$$

Dann $\frac{dV}{dr} = -f(r)$ und in Kugelkoordinaten $\nabla V = \frac{dV}{dr} \mathbf{e}_r = -f(r) \mathbf{e}_r$. Somit $-\nabla V = f(r) \mathbf{e}_r = \mathbf{F}$. Also ist \mathbf{F} konservativ.

(d) Arbeit–Energie-Satz

Mit $T = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2$ und Newton $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$:

$$\frac{dT}{dt} = m\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}.$$

Integration über $[t_i, t_f]$ und Benutzung von $d\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}} dt$ liefert

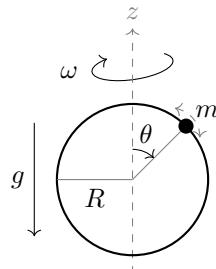
$$W = \int_{\mathbf{r}(t_i)}^{\mathbf{r}(t_f)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = T(t_f) - T(t_i) = \Delta T.$$

7.3 Kurioses

8 Perle auf rotierendem Draht

Aufgabe 8 Perle auf rotierendem Draht

Ein Teilchen der Masse m sei auf einem kreisförmigen, rotierendem Draht angebracht und auf diesem frei beweglich. Der Draht rotiere im homogenen Schwerkraftfeld der Stärke $g \geq 0$ mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die Vertikale.



- Gib die Zwangsbedingungen an und charakterisiere sie.
- Stelle die Lagrange-Funktion auf und leite die Bewegungsgleichung her.
- Zeige, dass durch die Einführung der dimensionslosen Zeit $\tau = \omega t$ die Bewegungsgleichung auf die Form

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} - \sin\theta \cos\theta - \mu \sin\theta = 0 \quad (7)$$

mit einem Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ gebracht werden kann.

- Überführe die entdimensionalisierte Gleichung in ein System erster Ordnung, indem du die Größe $\Omega = \frac{d\theta}{d\tau}$ einführst. Bestimme die Fixpunkte $(\frac{\theta^*}{\Omega^*})$ des Systems, also die Punkte, für die gilt: $\frac{d}{d\tau}(\frac{\theta^*}{\Omega^*}) = \mathbf{0}$
- Untersuche die Fixpunkte auf ihre Stabilität. Betrachte dazu eine kleine Störung $(\frac{\theta^*}{\Omega^*}) + (\frac{\delta\theta}{\delta\Omega})$ und betrachte die sich ergebende Differentialgleichung in linearer Ordnung von $(\frac{\delta\theta}{\delta\Omega})$. Die Stabilität ergibt sich aus den Eigenwerten λ_i der Systemmatrix: Gilt für alle Eigenwerte $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$, dann ist der Fixpunkt stabil, ansonsten ist er instabil.
Hinweis: Mit dem trigonometrischen Pythagoras kann man zeigen: $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.
- Trage die Fixpunkte θ^* über den Parameter μ auf. Zeichne stabile Fixpunkte als durchgezogene und instabile als durchbrochene Linie.

Federführende Dokumentation: Lucca Saar

8.1 Hintergrund

8.2 Musterlösung

(a) Zwangsbedingungen & Freiheitsgrade

- Holonom:** Bewegung ist auf die Kreisbahn mit festem Radius R beschränkt ($|\mathbf{r}| = R$).
- Ideal:** Normalkräfte des Drahts verrichten entlang der Bahn keine Arbeit.
- Rheonom:** Die Zwangsbedingung ist *zeitabhängig*, weil die Draht-Ebene mit Winkel ωt um die Vertikale rotiert.
- Freiheitsgrad:** 1 (die Lage auf dem Ring ist vollständig durch $\theta(t)$ beschrieben).

(b) Lagrange-Funktion und E-L-Gleichung (vollständige Herleitung)

Schritt 1: Explizite Bahn in Inertialkoordinaten. Die Position der Perle in der *Inertial*-Basis $(\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z)$ kann so geschrieben werden:

$$\mathbf{r}(t) = R \begin{pmatrix} \sin\theta(t) \cos(\omega t) \\ \sin\theta(t) \sin(\omega t) \\ \cos\theta(t) \end{pmatrix}.$$

Begründung: (i) Abstand zur Rotationsachse: $R \sin\theta$ (horizontaler Radius), (ii) Rotation um z liefert die $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$ -Anteile, (iii) Höhe $z = R \cos\theta$.

Schritt 2: Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}$ und ihr Betrag. Leite komponentenweise ab:

$$\dot{\mathbf{r}} = R \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \theta \cos \omega t - \omega \sin \theta \sin \omega t \\ \dot{\theta} \cos \theta \sin \omega t + \omega \sin \theta \cos \omega t \\ -\dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Quadrat der Geschwindigkeit (Skalarprodukt $\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}$):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}^2 &= R^2 \left[(\dot{\theta} \cos \theta \cos \omega t - \omega \sin \theta \sin \omega t)^2 \right. \\ &\quad \left. + (\dot{\theta} \cos \theta \sin \omega t + \omega \sin \theta \cos \omega t)^2 + (-\dot{\theta} \sin \theta)^2 \right]. \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren und sammeln (gemischte $\dot{\theta}\omega$ -Terme heben sich):

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = R^2 (\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + \omega^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta) = R^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta).$$

Schritt 3: Kinetische und potentielle Energie.

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta).$$

Die potentielle Energie (mit Nullniveau frei wählbar) nehmen wir klassisch als $V = mgz = mgR \cos \theta$.

Schritt 4: Lagrange-Funktion.

$$L(\theta, \dot{\theta}, t) = T - V = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) - mgR \cos \theta.$$

Schritt 5: Euler–Lagrange-Gleichung. Berechne die Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m R^2 \dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m R^2 \ddot{\theta}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{1}{2} m R^2 \cdot 2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta - (-mgR \sin \theta) = m R^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta + mgR \sin \theta.$$

EL-Gleichung $\frac{d}{dt} (\partial_{\dot{\theta}} L) - \partial_{\theta} L = 0$ liefert

$$m R^2 \ddot{\theta} - (m R^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta + mgR \sin \theta) = 0.$$

Division durch $m R^2$:

$$\ddot{\theta} - \omega^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{g}{R} \sin \theta = 0.$$

(c) Entdimensionalisierung

Definiere dimensionslose Zeit $\tau = \omega t$. Dann $\frac{d}{dt} = \omega \frac{d}{d\tau}$ und $\frac{d^2}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2}{d\tau^2}$. Bezeichne ' Ableitungen nach τ .

$$\omega^2 \theta'' - \omega^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{g}{R} \sin \theta = 0.$$

Teile durch ω^2 und setze $\mu := \frac{g}{R\omega^2}$:

$$\theta'' - \sin \theta \cos \theta - \mu \sin \theta = 0, \quad \mu = \frac{g}{R\omega^2}.$$

(d) System 1. Ordnung und Fixpunkte

Setze $\Omega := \theta'$. Dann

$$\theta' = \Omega, \quad \Omega' = \sin \theta (\cos \theta + \mu).$$

Fixpunkte (θ^*, Ω^*): Bedingungen $\theta' = 0, \Omega' = 0$ ergeben

$$\Omega^* = 0, \quad \sin \theta^* (\cos \theta^* + \mu) = 0.$$

Also

$$\theta^* \in \{0, \pi\} \text{ oder } \cos \theta^* = -\mu \text{ (nur falls } |\mu| \leq 1).$$

(e) Linearstabilität

Linearisierung von $(\theta', \Omega')^T$ um $(\theta^*, 0)$:

$$A(\theta^*) = \begin{pmatrix} \partial_\theta \theta' & \partial_\Omega \theta' \\ \partial_\theta \Omega' & \partial_\Omega \Omega' \end{pmatrix}_{(\theta^*, 0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos 2\theta^* + \mu \cos \theta^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Eigenwerte erfüllen $\lambda^2 = \cos 2\theta^* + \mu \cos \theta^*$.

Fälle:

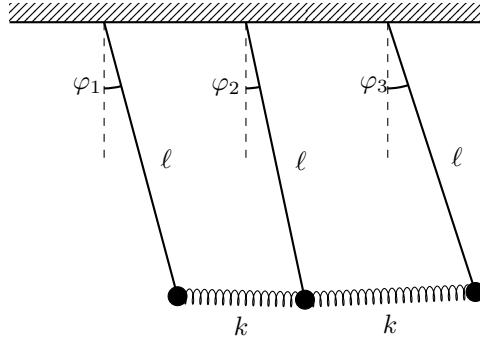
- $\theta^* = 0$: $\cos 0 = 1$, $\cos 0 \cdot \Rightarrow \lambda^2 = 1 + \mu > 0 \Rightarrow$ reelle $\lambda \Rightarrow$ Sattel \Rightarrow **instabil**.
- $\theta^* = \pi$: $\cos \pi = -1$, $\cos 2\pi = 1 \Rightarrow \lambda^2 = 1 - \mu$.
 - $\mu < 1$: $\lambda^2 > 0 \Rightarrow$ **instabil**.
 - $\mu = 1$: Grenzfall $\lambda = 0$.
 - $\mu > 1$: $\lambda^2 < 0 \Rightarrow$ rein imaginär \Rightarrow **linear stabil (Zentrum)**.
- $\cos \theta^* = -\mu$ (existiert nur für $|\mu| \leq 1$): Dann $\lambda^2 = \mu^2 - 1 \leq 0$.
 - $|\mu| < 1$: $\lambda^2 < 0 \Rightarrow$ **stabil (Zentrum)**.
 - $|\mu| = 1$: neutraler Grenzfall.

8.3 Kurioses

9 Drei gekoppelte Fadenpendel

Aufgabe 9 Drei gekoppelte Fadenpendel

Aus der Vorlesung kennen wir ein System aus zwei Fadenpendeln, die über eine Feder miteinander gekoppelt sind. Wir wollen dieses System nun um ein drittes gekoppeltes Pendel erweitern. Dabei nehmen wir an, dass alle Pendel die Länge ℓ sowie Masse m besitzen und durch identische Federn der Federkonstante k gekoppelt sind. Als generalisierte Koordinaten dienen die Auslenkungen $\varphi_i, i = 1, 2, 3$.



- Stelle die kinetische Energie T sowie die potenzielle Energie V auf. Wir wollen das System für *kleine Winkel* untersuchen, weshalb wir die auftretenden trigonometrischen Funktionen in V nähern. Die Auslenkung der Federn kann in dieser Näherung über die Bogenlänge der Pendel beschrieben werden, sodass das Endergebnis nur von $\varphi_i, i = 1, 2, 3$ abhängen sollte.
- Nutze die Lagrange-Gleichung, um Bewegungsgleichungen für die jeweiligen Auslenkungen φ_i aufzustellen. Formuliere diese in Matrix-Schreibweise:

$$\mathbf{T} \ddot{\Phi} = -\mathbf{K} \Phi, \quad \text{mit } \Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: \mathbf{T} sollte in deinem Ergebnis durch die Einheitsmatrix gegeben sein.

Im Folgenden wollen wir die Eigenmoden des Systems näher untersuchen. Dafür muss zuerst das Eigenwertproblem

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{T}) = 0$$

gelöst werden, um so die Eigenfrequenzen ω_i zu finden. Da dies für eine 3×3 -Matrix nicht trivial ist, wird eine faktorisierte Form des charakteristischen Polynoms angegeben:

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{T}) = \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2 \right) \left(\frac{g}{\ell} + \frac{k}{m} - \omega^2 \right) \left(\frac{g}{\ell} + 3 \frac{k}{m} - \omega^2 \right).$$

- Lies die Eigenfrequenzen des Systems ab. Löse dann die Gleichungssysteme $(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{T}) \mathbf{A} = 0$, um die (komplexen) Amplituden A_i der einzelnen Pendel zu finden. Beschreibe damit, wie die einzelnen Pendel relativ zueinander schwingen (Skizze) und sich die Amplituden zueinander verhalten.

Federführende Dokumentation: Max Lauer

9.1 Hintergrund

Dies ist eine schöne Aufgabe zum Wiederholen des Lagrange-Formalismus. Zudem widerholt man die Vorgehensweise bei einem System aus gekoppelten Differentialgleichungen und erhält am Ende der Rechnung im besten Fall eine sehr schön anschauliche Lösung.

Gekoppelte Oszillatoren kommen überall in der Natur vor. Beispielsweise die Interaktion von Atomen innerhalb eines Moleküls durch gekoppelte Schwingungen lässt sich durch dieses Modell erklären.

9.2 Musterlösung

a) Bezeichne für diese Aufgabe s_i die Auslenkungen der i-ten Masse von ihrer Ruhelage bezüglich ihres Fadenpendels. Durch den Sinussatz und die Kleinwinkelnäherung ergibt sich:

$$s_i = \sin(\varphi_i)l \approx \varphi_i l$$

Damit ergibt sich die kinetische Energie T als Summe der kinetischen Energien der Massen m_i zu:

$$T = \sum_{i=1}^3 \frac{m}{2} \frac{d}{dt} s_i = \frac{ml^2}{2} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2)$$

Das Potential ergibt sich als Summe vom Federpotential und dem Gravitationspotential einer jeden Masse. Das Federpotential lautet wie folgt:

$$V_F = -\frac{k}{2}((s_2 - s_1)^2 + (s_3 - s_2)^2)$$

Mit der Näherung für die s_i erhält man:

$$V_F = -\frac{kl^2}{2}(2\varphi_2^2 + \varphi_1^2 + \varphi_3^2 - 2\varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_2\varphi_3)$$

Das Gravitationspotential der einzelnen Massen hängt nur von der Höhe der Massen ab:

$$V_{g,i} = mgl(1 + \cos(\varphi_i))$$

Da wir kleine Winkel betrachten, können wir $(1 + \cos(\varphi))$ um $\varphi_0 = 0$ bis zur zweiten Ordnung taylor-entwickeln und erhalten:

$$V_{g,i} = \frac{m}{2}gl\varphi_i^2$$

b) Nun nutzen wir den Lagrange-Formalismus zweiter Art, um Bewegungsgleichungen für alle φ_i herzuleiten:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} = 0$$

Es ergeben sich folgende Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_1 &= -\left(\frac{k}{m} + \frac{g}{l}\right)\varphi_1 + \frac{k}{m}\varphi_2 \\ \ddot{\varphi}_2 &= \frac{k}{m}(\varphi_1 + \varphi_3) - \left(\frac{2k}{m} + \frac{g}{l}\right)\varphi_2 \\ \ddot{\varphi}_3 &= -\left(\frac{k}{m} + \frac{g}{l}\right)\varphi_3 + \frac{k}{m}\varphi_2\end{aligned}$$

Wir erhalten somit drei gekoppelte Differentialgleichungen, beziehungsweise ein System aus Differentialgleichungen, das wir mithilfe der Matrixschreibweise anschaulicher darstellen können:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{l}\right) & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{m} & \left(\frac{2k}{m} + \frac{g}{l}\right) & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{m} & \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{l}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}$$

c) Die Eigenfrequenzen ω_i^2 lauten:

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}$$

$$\omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{k}{m}$$

$$\omega_3^2 = \frac{g}{l} + \frac{3k}{m}$$

Nun können wir über die Eigenwertgleichung die Amplituden der einzelnen Schwingungen bei den Eigenmoden ermitteln.

Für ω_1^2 gilt:

$$\begin{pmatrix} \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3$$

Das bedeutet, dass bei ω_1^2 alle Massen in Phase schwingen.

Für ω_2^2 gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{m} & \frac{m}{k} & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow a_2 = 0 \wedge a_1 = -a_3$$

Das bedeutet, dass bei ω_2^2 die mittlere Masse ruht, und die beiden äußeren Massen entgegengesetzte Schwingungen mit gleicher Amplitude ausführen.

Für ω_3^2 gilt:

$$\begin{pmatrix} -\frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{m}{k} & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow a_1 = a_3 \wedge a_2 = -2a_1$$

Das bedeutet, dass bei ω_3^2 die äußeren Massen in Phase schwingen und die mittlere eine entgegengesetzte Schwingung mit doppelter Amplitude ausführt.

9.3 Kurioses

Als ich diese Aufgabe zum ersten Mal gerechnet hatte, habe ich das Gravitationspotential vernachlässigt, da ich annahm, dass der Höhenunterschied klein gegenüber der Auslenkung der Federn ist. Man kann leicht sehen, dass die Eigenmoden genau dieselben sind wie in der Musterlösung.

Die Eigenmoden scheinen also nicht vom Gravitationspotential beeinflusst zu werden.

10 Kreuzprodukt

Aufgabe 10 Kreuzprodukt

Wir betrachten zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$.

- a) Wie lauten die Komponenten des Kreuzprodukts zwischen \mathbf{a} und \mathbf{b} ?
- b) Zeige, dass $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ gilt.
- c) Zeige, dass $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ senkrecht auf \mathbf{a} und \mathbf{b} steht.
- d) Zeige, dass

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \alpha,$$

wobei α der Winkel zwischen \mathbf{a} und \mathbf{b} ist.

Hinweis: Untersuche $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2$.

- e) Zeige, dass die Vektoren im Spatprodukt zyklisch vertauscht werden können:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$$

Argumentiert mit der geometrischen Interpretation des Spatprodukts, warum die zyklische Vertauschbarkeit zu erwarten ist.

- f) Zeige mithilfe der BAC-CAB-Regel die Jacobi-Identität:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0.$$

Federführende Dokumentation:

10.1 Hintergrund

10.2 Musterlösung

10.3 Kurioses

11 Lenzscher Vektor - Eine weitere Erhaltungsgröße

Aufgabe 11 Lenzscher Vektor - Eine weitere Erhaltungsgröße

In der Vorlesung haben wir die Freiheitsgerade des Zwei-Körper-Problems von 12 auf 2 reduziert, indem wir die *Erhaltungsgrößen* des Systems gefunden haben: Die Konstanz des Gesamtimpulses (3), die geradlinig, gleichförmige Bewegung des Schwerpunkts (3), die Erhaltung des Drehimpulses (3), sowie die Energieerhaltung (1). Für das Kepler-Potenzial lässt sich noch eine weitere Konstante der Bewegung finden, der *Lenzsche Vektor* (oder auch *Laplace–Runge–Lenz Vektor*), definiert durch

$$\boldsymbol{\Lambda} = \frac{\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell}}{mk} - \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \text{mit } \boldsymbol{\ell} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}.$$

- a) Zeige durch Berechnung der totalen zeitlichen Ableitung, dass es sich bei $\boldsymbol{\Lambda}$ wirklich um eine Erhaltungsgröße handelt.

Hinweis: Es gilt $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$. Zeige zudem, dass $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = r\dot{r}$.

- b) Berechne den Betrag $|\boldsymbol{\Lambda}|$ und weise nach, dass er der Exzentrizität $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}}$ entspricht.

- c) Zeige, dass der Lenzsche Vektor entlang des Vektors zum Perihel zeigen muss, also $\boldsymbol{\Lambda} \parallel \mathbf{r}_{\min}$, r_{\min} bezeichne dabei den Perihelvektor.

Hinweis: Begründe zunächst, warum wir den Lenzschen Vektor einfach an \mathbf{r}_{\min} berechnen können und trotzdem eine allgemeine Aussage treffen können. Wie stehen \mathbf{r}_{\min} und der entsprechende Impulsvektor zueinander?

- d) Der Lenzsche Vektor erlaubt eine *integrationsfreie* Herleitung der Bahnkurve

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi)}, \quad \text{mit } p = \frac{\ell^2}{mk}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}}.$$

Berechne dazu das Skalarprodukt $\boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{r}$ und leite obige Formel her.

Hinweis: Definiere φ als $\sphericalangle(\boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{r})$.

Anmerkung: Auch wenn es sich bei $\boldsymbol{\Lambda}$ um einen Vektor handelt, legt er nur eine einzelne Erhaltungsgröße fest, nämlich die Konstanz der Perihelrichtung. Dies liegt daran, dass $\boldsymbol{\Lambda}$ bereits in der Bahnebene liegt und der Betrag durch die Exzentrizität eine Funktion der beiden Erhaltungsgrößen E und ℓ ist.

Federführende Dokumentation: Max Lauer

11.1 Hintergrund

Der Lenz-Vektor ist eine weitere konstante der Bewegung. Er zeigt vom Brennpunkt der Bahn (Kraftzentrum) zum nächstgelegenen Bahnpunkt (Perihel bei der Erdbahn) und hat somit eine Richtung parallel zur großen Bahnachse. In der klassischen Mechanik wird der Vektor hauptsächlich benutzt, um die Form und Orientierung der Umlaufbahn eines astronomischen Körpers um einen anderen zu beschreiben, etwa die Bahn eines Planeten um seinen Stern.

11.2 Musterlösung

a)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{\Lambda} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{p} \times \vec{L}}{mk} - \frac{\vec{r}}{r} \right) \\ &= \frac{1}{mk} \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \times \vec{L} + \vec{p} \times \frac{d\vec{L}}{dt} \right) - \frac{d}{dt} \frac{\vec{r}}{r} \end{aligned}$$

\vec{L} ist eine Erhaltungsgröße, das heißt: $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$

$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = -\nabla V$ mit $V = -\frac{k}{r}$

Also $\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{k\vec{r}}{r^3}$

Anstatt \vec{L} schreibt man $\vec{r} \times \vec{p}$ und anstatt \vec{p} schreibt man nun $m\dot{\vec{r}}$ und erhält insgesamt:

$$\frac{d}{dt} \vec{\Lambda} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) - \frac{\dot{\vec{r}}r - \dot{r}\vec{r}}{r^2}$$

Mithilfe der Hinweise in der Aufgabenstellung vereinfacht sich der Term zu:

$$\frac{\dot{\vec{r}}r^2 - \dot{r}\vec{r}r}{r^3} - \frac{\dot{\vec{r}}r - \dot{r}\vec{r}}{r^2} = 0$$

Daraus folgt, dass $\vec{\Lambda}$ eine Erhaltungsgröße ist.

Zuletzt wird noch die Identität aus dem Hinweis in der Aufgabenstellung gezeigt:

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \vec{r}^2 = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} r^2 = r\dot{r}$$

b) Betrachte $\vec{\Lambda}^2$:

$$\vec{\Lambda}^2 = \frac{1}{(mk)^2} (\vec{p} \times \vec{L})^2 + 1 + \frac{2}{mkr} (\vec{r} \cdot (\vec{p} \times \vec{L}))$$

Wegen $(\vec{p} \times \vec{L})^2 = p^2 L^2$, da $\vec{p} \perp \vec{L}$ ergibt sich:

$$\vec{\Lambda}^2 = \frac{2L^2}{mk^2} \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r} \right) + 1 = \frac{2L^2 E}{mk^2} + 1$$

Daraus folgt:

$$|\vec{\Lambda}| = \varepsilon$$

c) Wir wissen, dass $\vec{\Lambda}$ eine Erhaltungsgröße ist. Das bedeutet, dass dessen Wert an jedem Punkt der Bahn gleich ist. Daher wählen wir den Perihelvektor r_{min} . Der Impuls am Perihel \vec{p}_p steht senkrecht auf dem Perihelvektor. Außerdem steht der Drehimpuls ebenfalls senkrecht zur Ebene auf der sich der Impuls und der Perihelvektor befinden. Am Perihel ist $\dot{r} = 0$. Daraus folgt, dass $\vec{p}_p \propto \vec{e}_\varphi$. Das heißt, dass $(\vec{p}_p \times \vec{L}) \parallel r_{min}$. Logischerweise ist $\frac{r_{min}}{r}$ auch parallel zum Perihelvektor.

Damit folgt: $\vec{\Lambda} \parallel r_{min}$

d)

$$\vec{\Lambda} \cdot \vec{r} = \frac{1}{mk} \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \times \vec{L} \right) \cdot \vec{r} - \frac{\vec{r}^2}{r} = \frac{L^2}{mk} - r = p - r$$

Andererseits ist:

$$\vec{\Lambda} \cdot \vec{r} = \Lambda r \cos(\varphi)$$

Insgesamt folgt also durch Gleichsetzen der beiden Terme und Umstellen nach r :

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi)}$$

11.3 Kurioses

Der Laplace-Runge-Lenz-Vektor ermöglicht daher die elegante Herleitung der Bahnkurve $r(\varphi)$ eines Teilchens (z.B. Planet im Keplerproblem, Alphateilchen gestreut am Atomkern) in diesem Kraftfeld, ohne eine einzige Bewegungsgleichung lösen zu müssen.

12 Kreisförmige Orbits

Aufgabe 12 Kreisförmige Orbits

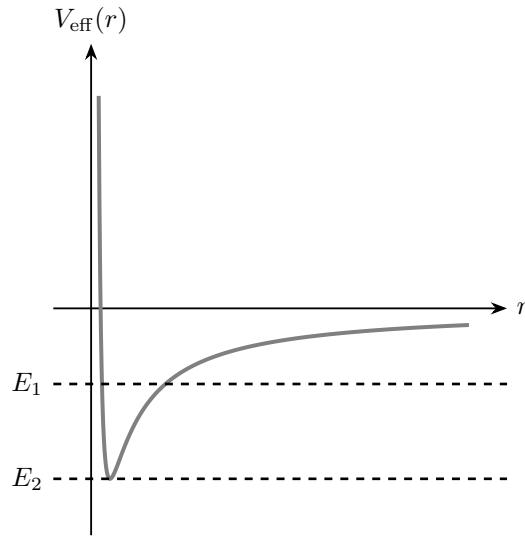


Abbildung 1: Graph von $V_{\text{eff}}(r)$ für das Kepler-Potenzial.

Abbildung 12 zeigt das effektive Potenzial.

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2},$$

wobei hier $V(r)$ als Kepler-Potenzial $V(r) = -k/r$ gewählt wurde. Zudem wurden zwei Energieniveaus E_1 und E_2 gekennzeichnet.

- Betrachte die Schnittstellen des Energieniveaus E_1 mit der Kurve des effektiven Potenzials. Welche besonderen Punkte des Orbits liegen an diesen Stellen. Was gilt insbesondere für die zeitliche Änderung des Radius \dot{r} an diesen Stellen?
- Betrachte nun das Energieniveau E_2 . An welcher besonderen Stelle des effektiven Potenzial liegt es? Was gilt hier für den Radius einer Bahn bzw. seine Änderungsrate \dot{r} ? Was bedeutet dies für die Form des Orbits?
- Leite mit deinen Erkenntnissen nun eine Bedingung für die Existenz stabiler Kreisbahnen her. Finde einen Ausdruck in Abhängigkeit der Ableitungen des Potenzials $V(r)$.
- Sei $V(r) = -k/r^n$. Nutze deine hergeleitete Stabilitätsbedingung, um herauszufinden, für welche n stabile Kreisbahnen auftreten können.

Federführende Dokumentation:

12.1 Hintergrund

12.2 Musterlösung

12.3 Kurioses

13 Legendre-Transformation

Aufgabe 13 *Legendre-Transformation*

Die Legendre-Transformierte einer konvexen Funktion $f(x)$ lautet:

$$g(y) = yx(y) - f(x(y)) \quad \text{mit} \quad y = f'(x).$$

- a) Zeige, dass die Rücktransformation auf die Variable x , d.h., $h(x) = xy(x) - g(y(x))$ wieder auf die Funktion $f(x)$ führt.
- b) Betrachte die Funktion $f(x) = x^2$.
 - 1. Berechne die Legendre-Transformierte $g(y)$ von $f(x)$.
 - 2. Zeige durch direkte Rechnung, dass die Legendre-Rücktransormierte $h(x)$ von $g(y)$ wieder $f(x)$ ergibt.
- c) Was folgt aus der Voraussetzung einer konvexen Funktion $f(x)$ für die Ableitung $f'(x)$?
- d) Wie lässt sich aus dieser Erkenntnis eine geometrische Beweis für die Legendre-Transformierte konstruieren?
Hinweis: Skizziere eine gültige Ableitung $y = f'(x)$ und $x = g'(y)$ in der (x, y) -Ebene.

Federführende Dokumentation:

13.1 Hintergrund

13.2 Musterlösung

13.3 Kurioses

14 Atwoodsche Fallmaschine – reloaded

Aufgabe 14 *Atwoodsche Fallmaschine – reloaded*

Wir betrachten noch einmal das System aus Aufgabe 5: Zwei Massen m_1, m_2 hängen an einem nicht dehbaren Faden der Länge l über einer festen Rolle im Schwerfeld der Erde senkrecht nach unten. Die Rolle und der Faden werden als masse- und reibungslos betrachtet.

- a) Wie lautet eine geeignete generalisierte Koordinate q ?
- b) Wie lautet die Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q})$ des Systems?
- c) Analysiere das System mit Hilfe des Hamilton-Formalismus:
 1. Stelle die zur Lagrange-Funktion dazugehörige Hamilton-Funktion $H(q, p)$ auf.
 2. Zeige, dass die Hamiltonschen Gleichungen die Bewegungsgleichung aus Aufgabe 5 reproduzieren.

Federführende Dokumentation:

14.1 Hintergrund

14.2 Musterlösung

14.3 Kurioses

15 Teilchen auf einer Kegeloberfläche

Aufgabe 15 Teilchen auf einer Kegeloberfläche

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m welches sich reibungsfrei und nur unter dem Einfluss der Gravitation auf einer kegelförmigen Oberfläche bewege. Für dieses Problem eignen sich hervorragend Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) , mit $z \geq 0$, wobei wir annehmen, dass die radiale Komponente durch $\rho = c z$ beschrieben werde. Damit bleiben φ und z als generalisierte Koordinaten.

- a) Stelle die kinetische und potenzielle Energie als Funktion von φ und z und deren zeitlichen Ableitungen auf und gib die Lagrange-Funktion an.

Hinweis: Es ist hilfreich, die kinetische Energie in Zylinderkoordinaten zu schreiben.

Zur Kontrolle: Für die Lagrange-Funktion solltest du folgendes Ergebnis erhalten haben:

$$L(\varphi, z, \dot{\varphi}, \dot{z}) = \frac{1}{2}m((c^2 + 1)\dot{z}^2 + (cz\dot{\varphi})^2) - mgz.$$

- b) Berechne die beiden generalisierten Impulse p_φ und p_z und gib die Hamilton-Funktion $H \equiv H(\varphi, z, p_\varphi, p_z)$ an. Verifiziere, dass H der Gesamtenergie entspricht.

- c) Stelle nun die kanonischen Bewegungsgleichungen für die φ - und z -Komponenten auf. Gibt es eine Erhaltungsgröße? Wenn ja, welche?

Hinweis: Denke an das Kepler-Problem und dessen Erhaltungsgrößen zurück.

- d) Begründe, dass die Bewegung des Teilchens zwischen zwei verschiedenen Höhen z_{\min} und z_{\max} ablaufen muss. Betrachte dazu die Hamilton-Funktion für $z \rightarrow 0$ und $z \rightarrow \infty$ und argumentiere mit der Konstanz der Energie E .

- e) An den Wendepunkten z_{\min} und z_{\max} muss $\dot{z} = 0$ gelten. Begründe, dass dies nur passieren kann, wenn der zugehörige konjugierte Impuls gerade verschwindet, $p_z = 0$. Zeige graphisch, dass dies für genau zwei Werte von z eintrifft. Nutze dabei den Fakt, dass $H = E$.

Hinweis: Skizziere H für $p_z = 0$ und zeichne dir ein Energieniveau E ein. Erinnere dich dann an die Diskussion des *effektiven Potenzials* beim Zentralkraft-Problem.

- f) Es ist möglich, dass sich das Teilchen auf einer Kreisbahn mit konstanter Höhe $z(t) = z_0 \forall t$ dreht. Was muss dann für \dot{z} und \dot{p}_z gelten? Was folgt für den Wert des Drehimpulses p_φ , der benötigt wird, um diese Bewegung zu ermöglichen?

Federführende Dokumentation: Max Lauer

15.1 Hintergrund

Zum Lösen dieser Aufgabe wird lediglich das Wissen über die Hamiltonmechanik benötigt. Eine gute Aufgabe zu Einüben des Hamiltonformalismus und gut zur Wiederholung der krummlinigen Koordinaten.

15.2 Musterlösung

- a) Die Geschwindigkeit in Zylinderkoordinaten ist:

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 = (c^2 + 1)z^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2$$

Damit ist die kinetische Energie:

$$T = \frac{m}{2}((c^2 + 1)\dot{z}^2 + (cz\dot{\varphi})^2)$$

Damit ist die Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}((c^2 + 1)\dot{z}^2 + (cz\dot{\varphi})^2) - mgz$$

b)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = p_z = m(c^2 + 1)\dot{z}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = p_\varphi = mc^2 z^2 \dot{\varphi}^2$$

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}$$

Nach längerer Rechnung und durch Ausdrücken von \dot{q}_i durch die kanonischen Impulse erhält man:

$$H = \frac{p_z^2}{2m(c^2 + 1)} + \frac{p_\varphi^2}{2mc^2 z^2} + mgz$$

$$E = T + V$$

Nach Ausdrücken von \dot{q}_i durch die kanonischen Impulse erhält man auch hier:

$$E = \frac{p_z^2}{2m(c^2 + 1)} + \frac{p_\varphi^2}{2mc^2 z^2} + mgz$$

Also:

$$H = E$$

c) Die kanonischen Gleichungen liefern:

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mc^2 z^2}$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -mg + \frac{p_\varphi^2}{mc^2 z^3}$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m(c^2 + 1)}$$

Damit ist der Impuls in Radialrichtung eine Erhaltungsgröße. Dies entspricht dem Drehimpuls.

d) Betrachten wir die Grenzwerte $H(z \rightarrow 0)$ und $H(z \rightarrow \infty)$.

$$H(z \rightarrow 0) = \infty$$

$$H(z \rightarrow \infty) = \infty$$

Wegen $H = E$ muss die Bewegung also zwischen einem maximalen und einem minimalen Wert von z ablaufen, sodass die Energie konstant sein kann.

e) Aus den kanonischen Gleichungen wissen wir:

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m(c^2 + 1)}$$

An den Wendepunkten muss $\dot{z} = 0$ sein. Daraus folgt, dass ebenso $p_z = 0$ sein muss.

Für die Gesamtenergie folgt mit der Beziehung $H = E$:

$$H(p_z = 0) = \frac{p_\varphi^2}{2mc^2 z^2} + mgz = E$$

f) Wenn sich die Höhe nicht ändert, gilt $\dot{z} = 0$. Daraus folgt auch, dass $p_z = 0$ und $\dot{p}_z = 0 \forall t$.

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -mg + \frac{p_\varphi^2}{mc^2 z^3} \stackrel{!}{=} 0$$

Daraus ergibt sich die Bedingung für den Drehimpuls in Abhängigkeit der festen Höhe z_0 :

$$p_\varphi \stackrel{!}{=} mc\sqrt{gz_0^3}$$

15.3 Kurioses

Zu dieser Aufgabe gibt es wenig Kurioses zu schreiben. Es ist anschaulich, dass wenn die Masse auf einer festen Höhe bleiben soll, der Drehimpuls für das Kräftegleichgewicht sorgt, ähnlich wie bei Planetenbahnen.

Ein Physikerfreund merkte an, dass ausgehend von der Aufgabenstellung nicht ganz klar sei, ob die Gravitation von der Erde käme, oder ob der Kegel eine gravitationskraft auf das Teilchen auwirkt. Natürlich ist der erste Fall hier gemeint. Letzterer wäre aber bestimmt spaßig zu rechnen...

16 Länge von Raumkurven

Aufgabe 16 *Länge von Raumkurven*

a)

b) Gegeben sei eine Raumkurve

$$\begin{aligned}\gamma : [t_0; t_1] &\longrightarrow \mathbf{R}^n \\ t &\longmapsto \gamma(t)\end{aligned}$$

im \mathbf{R}^n . Leiten Sie eine Formel für das infinitesimale Linienelement ds und damit einen Ausdruck für die Länge der Kurve her.

- c) Berechnen Sie die Länge von $\beta : [0; \ln(2)] \longrightarrow \mathbf{R}^3$, $t \longmapsto \begin{pmatrix} \sqrt{2t} \\ e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$.
- d) Leiten Sie für eine Kurve im \mathbf{R}^2 , die durch den Graphen einer Funktion $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$, mit $I \subset \mathbf{R}$, gegeben ist, eine Formel für das infinitesimale Linienelement und die Länge der Kurve her.
- e) Berechnen Sie die Länge einer Kettenlinie $f : [-1; 1] \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \cosh(x)$.

Federführende Dokumentation:

16.1 Hintergrund

16.2 Musterlösung

16.3 Kurioses

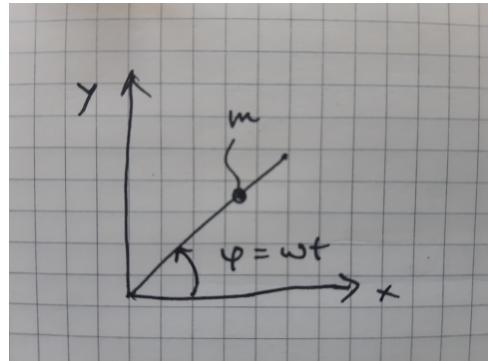
17 Massenpunkt auf rotierender Stange

Aufgabe 17 Massenpunkt auf rotierender Stange

Ein Massenpunkt der Masse m bewegt sich reibungsfrei auf einer um die feste Achse rotierenden Stange. Die Stange rotiert in der (x, y) -Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω . Die zugehörige Lagrange-Funktion lautet:

$$L(r, \dot{r}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\omega^2),$$

wobei r die Radialkoordinate des Massenpunkts bezeichnet.



- a) Leite die Lagrange-Funktion L her.
- b) Stelle die Hamilton-Funktion H auf und gib die Hamiltonschen Gleichungen an.
- c) Leite daraus die Bewegungsgleichung ab und gib ihre allgemeine Lösung an.
- d) Gilt $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$? Gilt $H = \text{const.}$?
- e) Ist H gleich der Gesamtenergie des Massenpunkts? Ist die Gesamtenergie E erhalten?

Federführende Dokumentation:

17.1 Hintergrund

17.2 Musterlösung

17.3 Kurioses

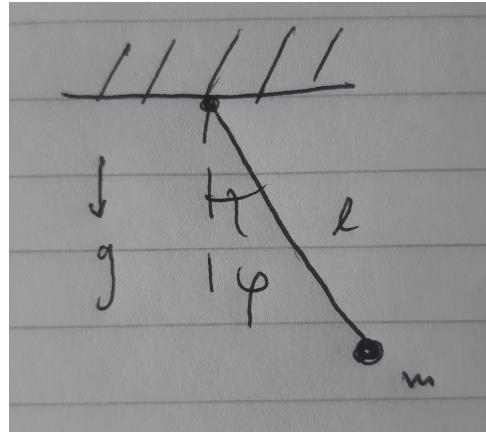
18 Ebenes Pendel im Phasenraum

Aufgabe 18 Ebenes Pendel im Phasenraum

Ein ebenes Pendel besteht aus einer Masse m am Ende einer masselosen Stange der Länge l . Im Schwerfeld hat das Pendel die potenzielle Energie

$$V(\varphi) = mgl(1 - \cos \varphi),$$

wobei φ den Auslenkwinkel des Pendels bezeichnet.



- a) Stelle die Hamilton-Funktion H auf.
- b) Gilt $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$? Ist H gleich der Gesamtenergie E ?
- c) Skizziere mögliche Bahnkurven für Energien $E \geq 0$ im zweidimensionalen (φ, p_φ) -Phasenraum. Betrachte die folgenden Fälle:
 1. $E = 0$
 2. $E \ll mgl$
Hinweis: Hier gilt $\varphi \ll 1$, also $1 - \cos \varphi \approx \frac{\varphi^2}{2}$.
 3. $E = 2mgl$
Hinweis: Benutze $1 + \cos x = 2 \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right)$.
 4. $E \gg 2mgl$

Ermittel für jeden dieser Fälle eine explizite oder implizite Relation zwischen φ und p_φ .

Federführende Dokumentation: Max Lauer

18.1 Hintergrund

In dieser Aufgabe kann der Hamiltonformalismus abermals eingeübt werden. Zudem kommt im letzten Aufgabenteil zum Abschätzen von Energien, und erhält anschauliche physikalische Zustände des ebenen Pendels.

18.2 Musterlösung

- a) Die Lagrangefunktion erhält man, indem man φ als generalisierte Koordinate verwendet und die kinetische Energie in Kugelkoordinaten schreibt. Die Höhe des Pendels drückt man ebenso durch φ aus und erhält somit:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2} - mgl(1 - \cos(\varphi))$$

Der generalisierte Impuls ist:

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi}$$

Daraus ergibt sich dann also die Hamiltonfunktion:

$$H = \dot{\varphi} p_\varphi - \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2} + mgl(1 - \cos(\varphi)) = \dots = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos(\varphi))$$

- b) Offensichtlich ist:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

$$E = T + V = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mgl(1 - \cos(\varphi)) = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos(\varphi)) = H$$

c)
1: $E = H = 0$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = 0$$

$$\Rightarrow p_\varphi = 0$$

Damit ist die Bahnkurve im Phasenraum also lediglich ein Punkt im Ursprung.

2: $E \ll mgl$

$$\Rightarrow \varphi \ll 1 \Rightarrow 1 - \cos(\varphi) \approx \frac{\varphi^2}{2}$$

Daraus ergibt sich die Ellipsengleichung:

$$\frac{p_\varphi^2}{2ml^2E} + \frac{mgl\varphi^2}{2E} = 1$$

Die Bahnkurve im Phasenraum ist damit eine Ellipse.

3: $E = 2mgl$

$$\Rightarrow p_\varphi = \pm \sqrt{4m^2gl^3} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Die Bahnkurve im Phasenraum die Verbindung des negativen und positiven Quadrates des Cosinus.

4: $E \gg 2mgl$

$$\Rightarrow \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} = E - mgl(1 - \cos(\varphi)) \approx E$$

Die Bahnkurve im Phasenraum entspricht einer Waagerechten, die eine konstante Winkelgeschwindigkeit impliziert. Das bedeutet es liegt eine freie Rotation vor.

18.3 Kurioses

Das ebene Pendel ist wohl die am meisten gerechnete Aufgabe in der klassischen Mechanik im Grundstudium. Leider gibt es Wenig Kurioses über es zu schreiben. Für kleine Auslenkungen wird die DGL harmonisch, jedoch ist sie das für größere Auslenkungswinkel natürlich nicht mehr wegen des Cosinusterms.

19 Schwerpunkt

Aufgabe 19 *Schwerpunkt*

Betrachte einen Würfel W mit Kantenlänge a und Massendichte $\rho(x, y, z) = \beta x^2$ mit $\beta = \text{const.}$ Der Koordinatenursprung liege so in einer Ecke, dass alle Koordinaten der Würfpunkte positiv sind.

- a) Skizziere den Würfel.
- b) Berechne die Gesamtmasse des Würfels $M = \int_W \rho(x, y, z) dV$.
- c) Berechne den Schwerpunkt $S = (S_x, S_y, S_z)$ mit $S_k = \frac{1}{M} \int_W \rho(x, y, z) k dV$, wobei $k = x, y, z$.
- d) Skizziere den Schwerpunkt in der (x, y) -Ebene.

Federführende Dokumentation:

19.1 Hintergrund

19.2 Musterlösung

19.3 Kurioses

20 Trägheitstensor von Zylinder, Stab, Scheibe, Punktmasse

Aufgabe 20 Trägheitstensor von Zylinder, Stab, Scheibe, Punktmasse

- a) Bestimme die Matrixform des Trägheitstensors Θ für einen Zylinder mit Höhe h und Radius R . Nutze dazu Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) und lege das körperfeste Koordinatensystem so, dass sein Ursprung im Schwerpunkt des Zylinders liege. Gehe von einer homogenen Masse aus, d.h. $\mu(\mathbf{r}) = \mu = \frac{m}{V}$, $\forall \mathbf{r} \in V$, m und V entsprechend die Masse bzw. das Volumen des betrachteten Körpers.

Hinweis: Ein Zylinder mit Höhe h und Radius R der Basis besitzt das Volumen $V = \pi R^2 h$. Drücke damit dein Endergebnis so aus, dass nur noch die Masse m des Körpers auftaucht, nicht die Massedichte. Du musst zudem nicht alle Integrale explizit berechnen, wenn du über die Symmetrie die Gleichheit mehrerer Trägheitsmomente begründen kannst. Kannst du auch eine Aussage über die Derivationsmomente Θ_{ij} , $i \neq j$ treffen?

- b) Überlege dir, welche Grenzübergänge du machen musst, um aus dem Zylinder einen Stab der Länge ℓ oder eine Scheibe vom Radius R , beide mit vernachlässigbarer Dicke, zu erhalten. Gib dann mittels Teil a) die entsprechenden Trägheitsmomente an.
- c) Betrachten wir erneut einen dünnen Stab der Länge ℓ . Die angegebenen Trägheitsmomente beziehen sich zur Zeit auf dessen Schwerpunkt. Wie lauten die Trägheitsmomente, wenn sich der Fixpunkt des Stabes hingegen an einem seiner Endpunkte befindet?
Hinweis: Verwende den Satz von Steiner.
- d) Eine idealisierte Punktmasse m im Ursprung besitzt kein Trägheitsmoment. Gilt dies auch, wenn wir die Punktmasse um eine Achse \mathbf{e}_n im festen Abstand d rotieren? Gib das Trägheitsmoment der Punktmasse bezüglich der Drehachse an.

Federführende Dokumentation:

20.1 Hintergrund

20.2 Musterlösung

20.3 Kurioses

21 Trägheitstensor eines Kegels

Aufgabe 21 Trägheitstensor eines Kegels

Wir wollen nun den Trägheitstensor eines Kreiskegels berechnen. Dabei eignen sich zur Betrachtung Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) . Wir platzieren den Kegel so, dass seine Spitze mit dem Ursprung O des Koordinatensystems zusammenfällt und seine Symmetriearchse entlang der z -Achse verlaufe (siehe Skizze unterhalb). Die Höhe des Kegels sei h , der Radius der Basis R . Zudem gehen wir von einer homogenen Massendichte $\mu(\mathbf{r}) \equiv \mu = \frac{m}{V}$ für jedes Punktes des Kegels aus.

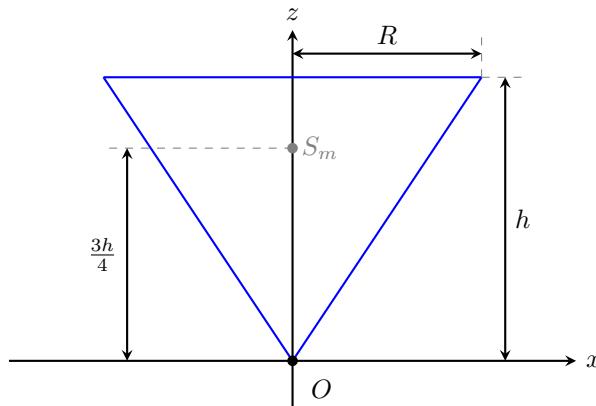


Abbildung 2: Querschnitt in der (x, z) -Ebene durch den Kegel. Die Spitze des Kegels ruhe im Ursprung O des Koordinatensystems und die Symmetriearchse verlaufe entlang der z -Achse. Der Schwerpunkt S_m liegt in diesem Fall auch auf dieser Achse und hat eine Entfernung von $3h/4$ zum Ursprung.

- Um die Matrix-Darstellung des Trägheitstensors Θ berechnen zu können, muss zunächst die Radialkomponente ρ parametrisiert werden. Stelle daher eine Funktion $\rho(z)$ in Abhängigkeit von h und R auf, die den derzeitigen Radius des Kegels an einer beliebigen Koordinate $z \in [0, h]$ beschreibe.
- Berechne nun die Diagonalelemente Θ_{ii} der Matrix-Darstellung des Trägheitstensors. Formuliere dein Endergebnis dabei so, dass nur noch die Masse $m = \mu V$ auftritt.
Hinweis: Das Volumen V eines Kreiskegels mit Radius R und Höhe h beträgt $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$. Beachte, dass das Volumenelement in Zylinderkoordinaten $d\mathbf{r} = \rho d\rho d\varphi dz$ lautet. Bei der Integration ist die obere Grenze des radialen Anteils durch $\rho(z)$ aus Teil a) gegeben. Diese Integration muss also vor der Ausführung des Integrals über die z -Komponente stattfinden. Du musst nicht alle drei Berechnung ausführen, wenn du über die Symmetrie die Gleichheit mehrerer Trägheitsmomente begründen kannst.
- Unsere Berechnung des Trägheitstensors bezieht sich zur Zeit noch auf den Koordinatenursprung O . Gib die Trägheitsmomente nun bezüglich des Schwerpunkts S_m an. Zeige dazu zunächst, dass dieser bei $\frac{3h}{4}\mathbf{e}_z$ liegt.
Hinweis: Nutze den Satz von Steiner, um die verschobenen Trägheitsmomente zu berechnen.
- Wann handelt es sich bei einem Kegel um einen Kugelkreisel, d.h.: Wann sind alle Hauptträgheitsmomente gleich?

Federführende Dokumentation:

21.1 Hintergrund

21.2 Musterlösung

21.3 Kurioses