Übungen zur Vorlesung
Theoretische Physik I+II für Lehramt

Universität des Saarlandes
Dr. habil. Philipp Hövel, Max Lauer

WS 2025/26 **Blatt 4** **11.11.2025**

Abgabe bis Freitag, den 21.11.2025 Uhr über die Moodle-Plattform.

Aufgabe 10 *Kreuzprodukt*

Wir betrachten zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$.

a) Wie lauten die Komponenten des Kreuzprodukts zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$?

b) Zeige, dass $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ gilt.

c) Zeige, dass $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ senkrecht auf $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ steht.

d) Zeige, dass
$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin\alpha,$$
wobei α der Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ist.
Hinweis: *Untersuche* $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2$.

e) Zeige, dass die Vektoren im Spatprodukt zyklisch vertauscht werden können:
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$$
Argumentiert mit der geometrischen Interpretation des Spatprodukts, warum die zyklische Vertauschbarkeit zu erwarten ist.

f) Zeige mithilfe der BAC-CAB-Regel die Jacobi-Identität:
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0.$$

Aufgabe 11 *Lenzscher Vektor - Eine weitere Erhaltungsgröße*

In der Vorlesung haben wir die Freiheitsgerade des Zwei-Körper-Problems von 12 auf 2 reduziert, indem wir die *Erhaltungsgrößen* des Systems gefunden haben: Die Konstanz des Gesamtimpulses (3), die geradlinig, gleichförmige Bewegung des Schwerpunkts (3), die Erhaltung des Drehimpulses (3), sowie die Energieerhaltung (1). Für das Kepler-Potenzial lässt sich noch eine weitere Konstante der Bewegung finden, der *Lenzsche Vektor* (oder auch *Laplace–Runge-Lenz Vektor*), definiert durch
$$\boldsymbol{\Lambda} = \frac{\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell}}{mk} - \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times m\dot{\boldsymbol{r}}.$$

a) Zeige durch Berechnung der totalen zeitlichen Ableitung, dass es sich bei $\boldsymbol{\Lambda}$ wirklich um eine Erhaltungsgröße handelt.
Hinweis: *Es gilt* $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$. *Zeige zudem, dass* $\boldsymbol{r} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = r\dot{r}$.

b) Berechne den Betrag $|\boldsymbol{\Lambda}|$ und weise nach, dass er der Exzentrizität $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}}$ entspricht.

c) Zeige, dass der Lenzsche Vektor entlang des Vektors zum Perihel zeigen muss, also $\boldsymbol{\Lambda} \parallel \boldsymbol{r}_{\min}$, $\boldsymbol{r}_m athrmmin$ bezeichne dabei den Perihelvektor.
Hinweis: *Begründe zunächst, warum wir den Lenzschen Vektor einfach an* $\boldsymbol{r}_{\min}$ *berechnen können und trotzdem eine allgemeine Aussage treffen können. Wie stehen* $\boldsymbol{r}_{\min}$ *und der entsprechende Impulsvektor zueinander?*

d) Der Lenzsche Vektor erlaubt eine *integrationsfreie* Herleitung der Bahnkurve

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi)} , \quad \text{mit} \quad p = \frac{\ell^2}{mk} , \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}} .$$

Berechne dazu das Skalarprodukt $\mathbf{\Lambda} \cdot \boldsymbol{r}$ und leite obige Formel her.
Hinweis: *Definiere* φ *als* $\sphericalangle(\mathbf{\Lambda}, \boldsymbol{r})$.

Anmerkung: Auch wenn es sich bei $\mathbf{\Lambda}$ um einen Vektor handelt, legt er nur eine einzelne Erhaltungsgröße fest, nämlich die Konstanz der Perihelrichtung. Dies liegt daran, dass $\mathbf{\Lambda}$ bereits in der Bahnebene liegt und der Betrag durch die Exzentrizität eine Funktion der beiden Erhaltungsgrößen E und ℓ ist.

Aufgabe 12 *Kreisförmige Orbits*

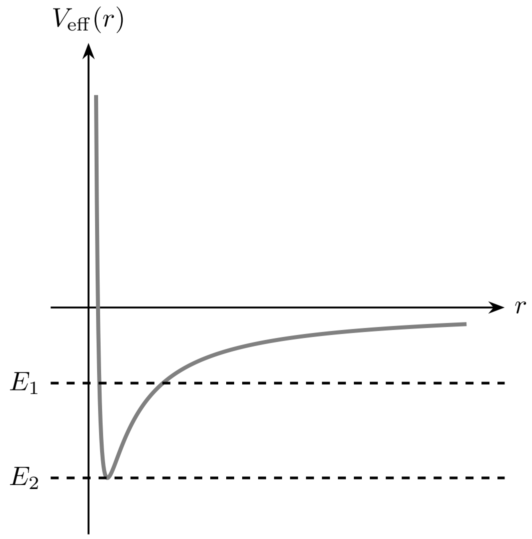

Abbildung 1: Graph von $V_{\text{eff}}(r)$ für das Kepler-Potenzial.

Abbildung zeigt das effektive Potenzial

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2} ,$$

wobei hier $V(r)$ als Kepler-Potenzial $V(r) = -k/r$ gewählt wurde. Zudem wurden zwei Energieniveaus E_1 und E_2 gekennzeichnet.

a) Betrachte die Schnittstellen des Energieniveaus E_1 mit der Kurve des effektiven Potenzials. Welche besonderen Punkte des Orbits liegen an diesen Stellen. Was gilt insbesondere für die zeitliche Änderung des Radius $\dot{r}$ an diesen Stellen?

b) Betrachte nun das Energieniveau E_2. An welcher besonderen Stelle des effektiven Potenzial liegt es? Was gilt hier für den Radius einer Bahn bzw. seine Änderungsrate $\dot{r}$? Was bedeutet dies für die Form des Orbits?

c) Leite mit deinen Erkenntnissen nun eine Bedingung für die Existenz stabiler Kreisbahnen her. Finde einen Ausdruck in Abhängigkeit der Ableitungen des Potenzials $V(r)$.

d) Sei $V(r) = -k/r^n$. Nutze deine hergeleitete Stabilitätsbedingung, um herauszufinden, für welche n stabile Kreisbahnen auftreten können.