Übungen zur Vorlesung
Theoretische Physik I+II für Lehramt

Universität des Saarlandes
Dr. habil. Philipp Hövel, Max Lauer

WS 2025/26 **Blatt 5** **18.11.2025**

Abgabe bis Freitag, den 28.11.2025 Uhr über die Moodle-Plattform.

Aufgabe 13 *Legendre-Transformation*

Die Legendre-Transformierte einer konvexen Funktion $f(x)$ lautet:

$$g(y) = yx(y) - f(x(y)) \quad \text{mit} \quad y = f'(x).$$

a) Zeige, dass die Rücktransformation auf die Variable x, d.h., $h(x) = xy(x) - g(y(x))$ wieder auf die Funktion $f(x)$ führt.

b) Betrachte die Funktion $f(x) = x^2$.

   1. Berechne die Legendre-Transformierte $g(y)$ von $f(x)$.
   2. Zeige durch direkte Rechnung, dass die Legendre-Rückransformierte $h(x)$ von $g(y)$ wieder $f(x)$ ergibt.

c) Was folgt aus der Voraussetzung einer konvexen Funktion $f(x)$ für die Ableitung $f'(x)$?

d) Wie lässt sich aus dieser Erkenntnis eine geometrische Beweis für die Legendre-Transformierte konstruieren?
Hinweis: Skizziere eine gültige Ableitung $y = f'(x)$ und $x = g'(y)$ in der (x, y)-Ebene.

Aufgabe 14 *Atwoodsche Fallmaschine – reloaded*

Wir betrachten noch einmal das System aus Aufgabe 5: Zwei Massen m_1, m_2 hängen an einem nicht dehnbaren Faden der Länge l über einer festen Rolle im Schwerefeld der Erde senkrecht nach unten. Die Rolle und der Faden werden als masse- und reibungslos betrachtet.

a) Wie lautet eine geeignete generalisierte Koordinate q?

b) Wie lautet die Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q})$ des Systems?

c) Analysiere das System mit Hilfe des Hamilton-Formalismus:

   1. Stelle die zur Lagrange-Funktion dazugehörige Hamilton-Funktion $H(q, p)$ auf.
   2. Zeige, dass die Hamiltonschen Gleichungen die Bewegungsgleichung aus Aufgabe 5 reproduzieren.

Aufgabe 15 *Teilchen auf einer Kegeloberfläche*

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m welches sich reibungsfrei und nur unter dem Einfluss der Gravitation auf einer kegelförmigen Oberfläche bewege. Für dieses Problem eignen sich hervorragend Zylinderkoordinaten $(\rho,\, \varphi,\, z)$, mit $z \geq 0$, wobei wir annehmen, dass die radiale Komponente durch $\rho = c\, z$ beschrieben werde. Damit bleiben φ und z als generalisierte Koordinaten.

a) Stelle die kinetische und potenzielle Energie als Funktion von φ und z und deren zeitlichen Ableitungen auf und gib die Lagrange-Funktion an.
Hinweis: Es ist hilfreich, die kinetische Energie in Zylinderkoordinaten zu schreiben.
Zur Kontrolle: Für die Lagrange-Funktion solltest du folgendes Ergebnis erhalten haben:

$$L(\varphi,\, z,\, \dot{\varphi},\, \dot{z}) = \frac{1}{2} m \Big((c^2 + 1)\, \dot{z}^2 + (cz\, \dot{\varphi})^2 \Big) - mg\, z\, .$$

b) Berechne die beiden generalisierten Impulse p_φ und p_z und gibt die Hamilton-Funktion $H \equiv H(\varphi,\, z,\, p_\varphi,\, p_z)$ an. Verifiziere, dass H der Gesamtenergie entspricht.

c) Stelle nun die kanonischen Bewegungsgleichungen für die φ- und z-Komponenten auf. Gibt es eine Erhaltungsgröße? Wenn ja, welche?
Hinweis: Denke an das Kepler-Problem und dessen Erhaltungsgrößen zurück.

d) Begründe, dass die Bewegung des Teilchens zwischen zwei verschiedenen Höhen z_{min} und z_{max} ablaufen muss. Betrachte dazu die Hamilton-Funktion für $z \longrightarrow 0$ und $z \longrightarrow \infty$ und argumentiere mit der Konstanz der Energie E.

e) An den Wendepunkten z_{min} und z_{max} muss $\dot{z} = 0$ gelten. Begründe, dass dies nur passieren kann, wenn der zugehörige konjugierte Impuls gerade verschwindet, $p_z = 0$. Zeige graphisch, dass dies für genau zwei Werte von z eintrifft. Nutze dabei den Fakt, dass $H = E$.
Hinweis: Skizziere H für $p_z = 0$ und zeichne dir ein Energieniveau E ein. Erinnere dich dann an die Diskussion des *effektiven Potenzials* beim Zentralkraft-Problem.

f) Es ist möglich, dass sich das Teilchen auf einer Kreisbahn mit konstanter Höhe $z(t) = z_0 \,\forall\, t$ dreht. Was muss dann für $\dot{z}$ und $\dot{p}_z$ gelten? Was folgt für den Wert des Drehimpulses p_φ, der benötigt wird, um diese Bewegung zu ermöglichen?