Übungen zur Vorlesung
Theoretische Physik I+II für Lehramt

Universität des Saarlandes
Dr. habil. Philipp Hövel, Max Lauer

WS 2025/26 **Blatt 6** **25.11.2025**

Abgabe bis Freitag, den 05.12.2025 Uhr über die Moodle-Plattform.

Aufgabe 16 *Länge von Raumkurven*

a)

b) Gegeben sei eine Raumkurve

$$\gamma : \ [t_0; t_1] \longrightarrow \mathbf{R}^n$$
$$t \longmapsto \gamma(t)$$

im $\mathbf{R}^n$. Leiten Sie eine Formel für das infinitesimale Linienelement $\mathrm{d}s$ und damit einen Ausdruck für die Länge der Kurve her.

c) Berechen Sie die Länge von $\beta : \ [0; \ln(2)] \longrightarrow \mathbf{R}^3, \ t \longmapsto \begin{pmatrix} \sqrt{2}t \\ e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$.

d) Leiten Sie für eine Kurve im $\mathbf{R}^2$, die durch den Graphen einer Funktion $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$, mit $I \subset \mathbf{R}$, gegeben ist, eine Formel für das infinitesimale Linienelement und die Länge der Kurve her.

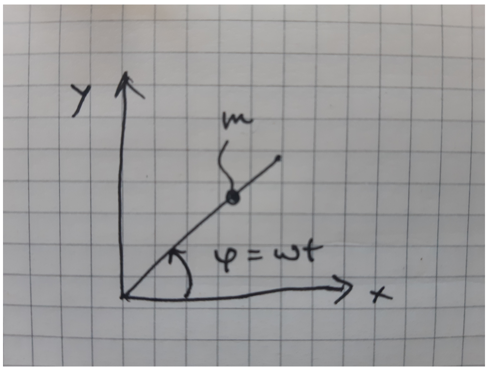
e) Berechnen Sie die Länge einer Kettenlinie $f : \ [-1; 1] \longrightarrow \mathbf{R}, \ x \longmapsto \cosh(x)$.

Aufgabe 17 *Massenpunkt auf rotierender Stange*

Ein Massenpunkt der Masse m bewegt sich reibungsfrei auf einer um die feste Achse rotierenden Stange. Die Stange rotiert in der (x, y)-Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Die zugehörige Lagrange-Funktion lautet:

$$L(r, \dot{r}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\omega^2)\,,$$

wobei r die Radialkoordinate des Massenpunkts bezeichnet.



a) Leite die Lagrange-Funktion L her.

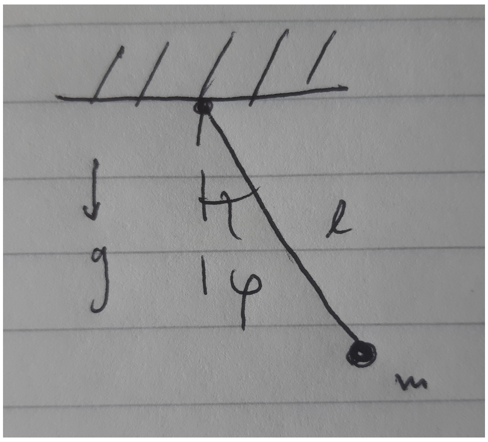
b) Stelle die Hamilton-Funktion H auf und gib die Hamiltonschen Gleichungen an.

c) Leite daraus die Bewegungsgleichung ab und gib ihre allgemeine Lösung an.

d) Gilt $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$? Gilt $H = \text{const.}$?

e) Ist H gleich der Gesamtenergie des Massenpunkts? Ist die Gesamtenergie E erhalten?

Aufgabe 18 *Ebenes Pendel im Phasenraum*



Ein ebenes Pendel besteht aus einer Masse m am Ende einer masselosen Stange der Länge l. Im Schwerefeld hat das Pendel die potenzielle Energie

$$V(\varphi) = mgl(1 - \cos\varphi)\,,$$

wobei φ den Auslenkwinkel des Pendels bezeichnet.

a) Stelle die Hamilton-Funktion H auf.

b) Gilt $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$? Ist H gleich der Gesamtenergie E?

c) Skizziere mögliche Bahnkurven für Energien $E \geq 0$ im zweidimensionalen (φ, p_φ)-Phasenraum. Betrachte die folgenden Fälle:

   1. $E = 0$
   2. $E \ll mgl$
      Hinweis: Hier gilt $\varphi \ll 1$, also $1 - \cos\varphi \approx \frac{\varphi^2}{2}$.
   3. $E = 2mgl$
      Hinweis: Benutze $1 + \cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$.
   4. $E \gg 2mgl$

   Ermittel für jeden dieser Fälle eine explizite oder implizite Relation zwischen φ und p_φ.