Übungen zur Vorlesung
Theoretische Physik I+II für Lehramt

Universität des Saarlandes
Dr. habil. Philipp Hövel, Max Lauer

WS 2025/26 **Blatt 7** **02.12.2025**

Abgabe bis Freitag, den 12.12.2025 Uhr über die Moodle-Plattform.

Aufgabe 19 *Schwerpunkt*

Betrachte einen Würfel W mit Kantenlänge a und Massendichte $\rho(x, y, z) = \beta x^2$ mit $\beta = const.$ Der Koordinatenursprung liege so in einer Ecke, dass alle Koordinaten der Würfelpunkte positiv sind.

a) Skizziere den Würfel.

b) Berechne die Gesamtmasse des Würfels $M = \int_W \rho(x, y, z)\,\mathrm{dV}$.

c) Berechnee den Schwerpunkt $\boldsymbol{S} = (S_x, S_y, S_z)$ mit $S_k = \frac{1}{M}\int_W \rho(x, y, z)\,k\,\mathrm{dV}$, wobei $k = x, y, z$.

d) Skizziere den Schwerpunkt in der (x, y)-Ebene.

Aufgabe 20 *Trägheitstensor von Zylinder, Stab, Scheibe, Punktmasse*

a) Bestimme die Matrixform des Trägheitstensors $\boldsymbol{\Theta}$ für einen Zylinder mit Höhe h und Radius R. Nutze dazu Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) und lege das körperfeste Koordinatensystem so, dass sein Ursprung im Schwerpunkt des Zylinders liege. Gehe von einer homogenen Massedichte aus, d.h $\mu(\mathbf{r}) = \mu = \frac{m}{V}$, $\forall \mathbf{r} \in V$, m und V entsprechend die Masse bzw. das Volumen des betrachteten Körpers.
Hinweis: Ein Zylinder mit Höhe h und Radius R der Basis besitzt das Volumen $V = \pi R^2 h$. Drücke damit dein Endergebnis so aus, dass nur noch die Masse m des Körpers auftaucht, nicht die Massedichte. Du musst zudem nicht alle Integrale explizit berechnen, wenn du über die Symmetrie die Gleichheit mehrerer Trägheitsmomente begründen kannst. Kannst du auch eine Aussage über die Derivationsmomente Θ_{ij}, $i \neq j$ treffen?

b) Überlege dir, welche Grenzübergänge du machen musst, um aus dem Zylinder einen Stab der Länge ℓ oder eine Scheibe vom Radius R, beide mit vernachlässigbarer Dicke, zu erhalten. Gib dann mittels Teil a) die entsprechenden Trägheitsmomente an.

c) Betrachten wir erneut einen dünnen Stab der Länge ℓ. Die angegebenen Trägheitsmomente beziehen sich zur Zeit auf dessen Schwerpunkt. Wie lauten die Trägheitsmomente, wenn sich der Fixpunkt des Stabes hingegen an einem seiner Endpunkte befindet?
Hinweis: Verwende den Satz von Steiner.

d) Eine idealisierte Punktmasse m im Ursprung besitzt kein Trägheitsmoment. Gilt dies auch, wenn wir die Punktmasse um eine Achse $\mathbf{e}_n$ im festen Abstand d rotiert? Gib das Trägheitsmoment der Punktmasse bezüglich der Drehachse an.

Aufgabe 21 *Trägheitstensor eines Kegels*

Wir wollen nun den Trägsheitstensor eines Kreiskegels berechnen. Dabei eignen sich zur Betrachtung Zylinderkoordinaten $(\rho,\, \varphi,\, z)$. Wir platzieren den Kegel so, dass seine Spitze mit dem Ursprung O des Koordinatensystems zusammenfällt und seine Symmetrieachse entlang der z-Achse verlaufe (siehe Skizze unterhalb). Die Höhe des Kegels sei h, der Radius der Basis R. Zudem gehen wir von einer homogen Massdichte $\mu(\mathbf{r}) \equiv \mu = \frac{m}{V}$ für jedem Punkt des Kegels aus.

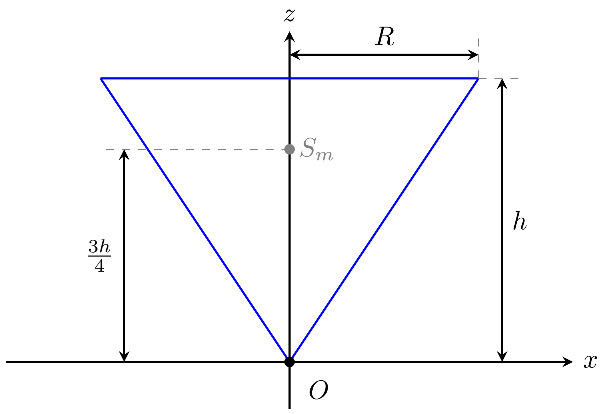

Abbildung 1: Querschnitt in der $(x,\, z)$-Ebene durch den Kegel. Die Spitze des Kegels ruhe im Ursprung O des Koordinatensystems und die Symmetrieachse verlaufe entlang der z-Achse. Der Schwerpunkt S_m liegt in diesem Fall auch auf dieser Achse und hat eine Entfernung von $3h/4$ zum Ursprung.

a) Um die Matrix-Darstellung des Trägheitstensors $\boldsymbol{\Theta}$ berechnen zu können, muss zunächst die Radialkomponente ρ parametrisiert werden. Stelle daher eine Funktion $\rho(z)$ in Abhängigkeit von h und R auf, die den derzeitigen Radius des Kegels an einer beliebigen Koordinate $z \in [0,\, h]$ beschreibe.

b) Berechne nun die Diagonalelemente Θ_{ii} der Matrix-Darstellung des Trägheitstensors. Formuliere dein Endergebnis dabei so, dass nur noch die Masse $m = \mu V$ auftritt.
Hinweis: Das Volumen V eines Kreiskegels mit Radius R und Höhe h beträgt $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$. Beachte, dass das Volumenelement in Zylinderkoodinaten $d\mathbf{r} = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$ lautet. Bei der Integration ist die obere Grenze des radialen Anteils durch $\rho(z)$ aus Teil a) gegeben. Diese Integration muss also vor der Ausführung des Integrals über die z-Komponente stattfinden. Du musst nicht alle drei Berechnung ausführen, wenn du über die Symmetrie die Gleichheit mehrerer Trägheitsmomente begründen kannst.

c) Unsere Berechnung des Trägheitstensors bezieht sich zur Zeit noch auf den Koordinatenursprung O. Gib die Trägheitsmomente nun bezüglich des Schwerpunkts S_m an. Zeige dazu zunächst, dass dieser bei $\frac{3h}{4}\mathbf{e}_z$ liegt.
Hinweis: Nutze den Satz von Steiner, um die verschobenen Trägheitsmomente zu berechnen.

d) Wann handelt es sich bei einem Kegel um einen Kugelkreisel, d.h.: Wann sind alle Hauptträgheitsmomente gleich?